ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 1: (КО)ГОМОЛОГИИ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ. УМНОЖЕНИЕ В КОГОМОЛОГИЯХ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть $A, B \subset X$ — такие подмножества, что пространство X покрыто их внутренностями. Постройте когомологическую последовательность Майера–Вьеториса

$$\cdots \to H^*(X;G) \to H^*(A;G) \oplus H^*(B;G) \to H^*(A \cap B;G) \xrightarrow{\delta} H^{*+1}(X;G) \to \ldots,$$

и опишите гомоморфизм δ.

2. Докажите, что в группе $H^1(X;\mathbb{Z})$ нет элементов кручения.

3. а) Для $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}$ вычислите всевозможные их Tor'ы и Ext'ы.
б) Выведите: если гомологии пространства X имеют вид $H_n(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus T_n$, где T_n — конечная группа, то $H^n(X;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_n} \oplus T_{n-1}$.

4. Докажите: если отображение $f : X \to Y$ индуцирует изоморфизм $H_*(X;\mathbb{Z}) \to H_*(Y;\mathbb{Z})$, то оно индуцирует изоморфизм (ко)гомологий с коэффициентами в любой абелевой группе. (Используйте теорему об универсальных коэффициентах.)

5. Вычислите группы $\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$ и $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)$.

6. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, M, N — R-модули. Докажите, что всякая короткая точная последовательность R-модулей $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ индуцирует длинные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_i^R(M',N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M,N) \to \mathrm{Tor}_i^R(M'',N) \to \mathrm{Tor}_{i-1}^R(M',N) \to \ldots,$$

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Ext}^i_R(M',N) \leftarrow \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \leftarrow \mathrm{Ext}^i_R(M'',N) \leftarrow \mathrm{Ext}^{i-1}_R(M',N) \leftarrow \ldots,$$

а короткая точная последовательность $0 \to N' \to N \to N'' \to 0$ — длинные точные последовательности

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N') \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,N'') \to \mathrm{Ext}^{i+1}_R(M,N) \to \ldots$$

7. Опишите кольцо $(H^0(X;\mathbb{Z}), \smile)$, где X — произвольное топологическое пространство. Всегда ли отображение $H^0(X;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} H^0(Y;\mathbb{Z}) \to H^0(X \times Y;\mathbb{Z})$ является изоморфизмом?

8. а) При $n \le \infty$ вычислите группы $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$, $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$ и естественный гомоморфизм $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \to H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$.
б) Вычислите гомоморфизм Бокштейна $\beta : H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \to H^{*+1}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2)$.
в) Считая известным кольцо $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1} = 0)$, $\deg x = 1$, опишите умножение в $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$.
г) Докажите, что $H^*(\mathbb{R}P^{2k+1};\mathbb{Z}) \simeq H^*(\mathbb{R}P^{2k} \vee S^{2k+1};\mathbb{Z})$ как кольца, но эти пространства не гомотопически эквивалентны.

9. а) Пусть S_g — сфера с g ручками. Опишите умножение в $H^*(S_g;\mathbb{Z})$, используя отображения $S_g \to S_{g-1} \vee T^2$ и изоморфизм колец $H^*(T^2;\mathbb{Z}) \cong \Lambda_{\mathbb{Z}}[x,y]$.
б) Пусть S — замкнутая неориентируемая поверхность. Вычислите умножение в $H^*(S;\mathbb{Z}_2)$ и $H^*(S;\mathbb{Z})$.

10. Постройте функцию $q : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такую, что $q(m) - q(m+n) + q(n) = mn$. Выведите, что $x \smile x = 0$ для всех $x \in H^1(X;\mathbb{Z})$.