НМУ, II курс, 25.09.2025

Листок 2.

Счетное вероятностное пространство

Задача 1. Пусть $p_k \geq 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Докажите, что функция $P\colon 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, заданная формулой

$$P(A) = \sum_{k\colon\ k \in A} p_k$$

является сигма-аддитивной вероятностной мерой.

Задача 2. Введем на пространстве вероятностных мер на $2^{\mathbb{N}}$ расстояние

$$\varrho(P,Q) = \sum_k |p_k - q_k|, \quad P(A) = \sum_{k\colon\ k\in A} p_k, \quad Q(A) = \sum_{k\colon\ k\in A} q_k.$$

(a) Докажите, что это метрика.

(b) Докажите, что пространство вероятностных мер с такой метрикой является полным сепарабельным метрическим пространством.

(c) Докажите, что $\varrho(P_n, P) \to 0$ тогда и только тогда, когда для всякой ограниченной последовательности c_k последовательность $x_n = \sum_k c_k p_k^n$ сходится к $x = \sum_k c_k p_k$, где веса p_k^n задают меру P_n, а p_k задают меру P.

Далее в отдельных случаях вместо $\mathbb{N}$ удобнее рассматривать $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Расстояние между вероятностными мерами на $2^{\mathbb{N}_0}$ определяется аналогично и отличается лишь нумерацией суммы с нуля.

Задача 3. (a) Проверьте, что мера P на $2^{\mathbb{N}}$, заданная весами $p_k = q^{k-1}p$, где $p, q \geq 0$, $p+q=1$, вероятностная. Такая мера называется геометрическим распределением с параметром p.

(b) Проверьте, что мера P на $2^{\mathbb{N}_0}$, заданная весами $p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$, вероятностная. Такая мера называется распределением Пуассона с параметром λ.

Задача 4. Пусть $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. Рассмотрим на $\mathbb{N}$ последовательность вероятностных мер P_n, заданных такими весами p_k^n, что $p_k^n = 0$ при $k > n$, $p_k^n = q^{k-1}p$ при $k \leq n-1$ и $p_n^n = q^n$. Проверьте, что это действительно вероятностные меры. Как они связаны со схемой Бернулли? Пусть P — геометрическое распределение с параметром p. Докажите, что $\|P_n - P\| \to 0$.

Задача 5. (Теорема Пуассона) Пусть $\lambda > 0$. Рассмотрим на $\mathbb{N}_0$ последовательность вероятностных мер P_n, заданных такими весами p_k^n, что $p_k^n = 0$ при $k > n$ и $p_k^n = C_n^k\bigl(\frac{\lambda}{n}\bigr)^k\bigl(1 - \frac{\lambda}{n}\bigr)^{n-k}$. Рассматриваем достаточно большие номера n, при которых $\frac{\lambda}{n} < 1$. Проверьте, что это действительно вероятностные меры. Как они связаны со схемой Бернулли? Пусть P — распределение Пуассона с параметром λ. Докажите, что $\|P_n - P\| \to 0$. Как этот результат можно использовать при работе со схемой Бернулли?

Задача 6. По M ячейкам размещаются n частиц. Найдите вероятность $P_k(n, M)$ того, что в фиксированной ячейке содержится ровно k частиц. Пусть последовательность M_n такова, что отношение n/M_n постоянно и равно $\lambda > 0$. Найдите предел $\lim_{n\to\infty} P_k(n, M_n)$.

Задача 7. При наборе страницы книги наборщик в среднем совершает λ опечаток. Используя задачу 5 найдите для книг с большим числом страниц вероятность, что данная страница не содержит опечаток и вероятность, что на данной странице ровно k опечаток?

Задача 8. Оцените среднее число изюминок, которое должно быть в одной булочке, чтобы не более одной булочки из ста было без изюма.

Задача 9. Пусть P — сигма-аддитивная вероятностная мера на $\mathbb{N}$, причем $p_k > 0$. Предположим, что $p_{k+1} \leq p_k^2$. Докажите, что на таком вероятностном пространстве нет нетривиальных независимых событий.

Задача 10. Постройте такую вероятностную сигма-аддитивную меру P на $2^{\mathbb{N}}$, что существует счетный набор независимых в совокупности событий A_k с $0 < P(A_k) < 1$.

Задача 11. Докажите, что на $2^{\mathbb{N}}$ не существует такой сигма-аддитивной вероятностной меры P, что имеется несчетный набор независимых в совокупности событий A_k с $0 < P(A_k) < 1$.

Задача 12. Докажите, что на $2^{\mathbb{N}}$ не существует сигма-аддитивной меры P, удовлетворяющей условиям $P(\mathbb{N}) = 1$ и $P(k\mathbb{N}) = k^{-1}$ для всех k, где $k\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, кратных k.

Алгебры и сигма алгебры

Задача 13. Является ли алгеброй набор подмножеств $A \subset \mathbb{N}$, для которых существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n},$$

где через $|E|$ обозначено число элементов конечного множества?

Задача 14. Для множества $A \subset \Omega$ положим $A^1 = A$ и $A^0 = \emptyset$. Докажите, что сигма-алгебра, порожденная попарно непересекающимися множествами $A_1, \ldots, A_N$, которые в объединении дают все Ω, в точности состоит из множеств вида $A_1^{\varepsilon_1} \sqcup A_2^{\varepsilon_2} \sqcup \ldots \sqcup A_N^{\varepsilon_n}$, где $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$.

Задача 15. Докажите, что всякая конечная сигма-алгебра подмножеств Ω порождается множествами из некоторого конечного разбиения пространства на дизъюнктные множества.

Задача 16. Пусть X — непустое множество. Непустой набор подмножеств Π множества X называется *π-системой*, если он замкнут относительно операции пересечения. Набор подмножеств Λ множества X называется *λ-системой* (или *d-системой*), если

1) $X \in \Lambda$; 2) если $A, B \in \Lambda$, $A \subset B$, то $B \setminus A \in \Lambda$;

3) если $A_n \in \Lambda$, $A_n \subset A_{n+1}$, то $\cup_n A_n \in \Lambda$.

Докажите, что если λ-система содержит π-систему, то она содержит сигма-алгебру, порождённую этой π-системой.

Задача 17. Докажите, что произвольное (какое угодно по мощности) объединение отрезков (невырожденных), является борелевским множеством.

Задача 18. Является ли борелевским (на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) множеством подмножество числовой прямой, которое состоит из точек, в десятичной записи которых бесконечно много семёрок?

Задача 19. Докажите, что следующие семейства множеств порождают борелевскую сигма-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$: (a) прямоугольники $(a, b] \times (c, d]$, (b) «углы» $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$.

Задача 20. Докажите, что борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^2$ не порождается:

(a) полуплоскостями, образованными прямыми, которые параллельны некоторой данной прямой; (b) окружностями; (c) отрезками.

Задача 21. Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2$ — сигма-алгебры на Ω_1, Ω_2 и Ω_3 соответственно. Напомним, что

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma\Big(A_1 \times A_2\colon\ A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\Big),$$

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 = \sigma\Big(A_1 \times A_2 \times A_3\colon\ A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, A_3 \in \mathcal{A}_3\Big).$$

Обоснуйте следующие равенства

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3 = \big(\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2\big) \otimes \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 \otimes \big(\mathcal{A}_2 \otimes \mathcal{A}_3\big).$$

Задача 22. Являются ли борелевскими следующие подмножества $\mathbb{R}^\infty$:

$$(a)\ \Big\{(x_n)\colon\ \lim_{N\to\infty} \sup_{n>N} x_n \le 1\Big\},\ \ (b)\ \Big\{(x_n)\colon\ \lim_{N\to\infty} |x_n| \ge 1\Big\},$$

$$(c)\ \Big\{(x_n)\colon\ x_1 + \ldots + x_n = 0 \text{ хотя бы для одного } n\Big\}?$$

Задача 23. Докажите, что борелевская сигма-алгебра на $C[0,1]$ совпадает с сигма алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами.

Задача 24. Докажите, что следующие множества не принадлежат цилиндрической сигма алгебре $\mathbb{R}^{[0,1]}$, но принадлежат борелевской сигма алгебре $C[0,1]$:

$$(a)\ \Big\{(x_t)\colon\ \inf_{t\in[0,1]} x_t > 1\Big\},\ \ (b)\ \Big\{(x_t)\colon\ \lim_{t\to 1-} x_t = 0\Big\},$$

$$(c)\ \Big\{(x_t)\colon\ \ |x_t - x_s| \le |t - s| \quad \forall s, t \in [0,1]\Big\}.$$