

Аффинные пространства

Задача 2.1. В треугольнике ABC проведены медианы AD , BE и CF . Найдите сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

Задача 2.2. Дан пространственный четырёхугольник $ABCD$. Известны векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ и $\overrightarrow{CD} = \mathbf{v}$. Найдите вектор $\overrightarrow{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD .

Задача 2.3. Выведите формулы замены координат в аффинном пространстве.

Задача 2.4. Найдите геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырёхугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырёхугольника.

Задача 2.5. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$, $5x - y = 0$ и уравнение $3x - y = 0$ одной из его медиан. Составьте уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3, 9)$.

Задача 2.6. а) Согласно одной из аксиом Евклида, прямая делит плоскость на две полуплоскости, которые определяются условием: отрезок, соединяющий две точки из разных полуплоскостей, пересекает прямую, а отрезок, соединяющий две точки из одной полуплоскости, не пересекает прямую. Пусть прямая $\ell \in \mathbb{A}^2$ задана уравнением $F = Ax + By + C = 0$. Докажите, что подмножества $F_+ = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : Ax + By + C > 0\}$ и $F_- = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 : Ax + By + C < 0\}$ суть (открытые) полуплоскости относительно ℓ .

б) Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0, y_0) лежала внутри треугольника, образованного прямыми $A_i x + B_i y + C_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Задача 2.7. Пусть даны две прямые в $\mathbb{A}^2$, заданные общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти прямые а) пересекались в одной точке; б) были параллельны; в) совпадали.

Задача 2.8. Пусть даны две прямые $P + \mathbf{u}t$ и $Q + \mathbf{v}t$ в $\mathbb{A}^3$. Докажите, что эти прямые скрещиваются (т.е. не имеют общих точек и не параллельны) тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ некопланарны. Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти прямые а) пересекались в одной точке; б) были параллельны; в) совпадали.

Задача 2.9. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 в $\mathbb{A}^3$ заданы параметрически.

а) Когда существует плоскость, содержащая ℓ_1 и параллельная ℓ_2 ? б) Запишите ее общее уравнение.

Задача 2.10. Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 в $\mathbb{A}^3$ скрещиваются, а точка P не лежит ни на одной из них.

а) Всегда ли существует прямая ℓ , проходящая через P и пересекающая каждую из прямых ℓ_1 и ℓ_2 ? (Если да, привести доказательство, если нет, указать явный контрпример с числами.)

б) Найдите уравнения прямой ℓ (параметрические или как пересечение двух плоскостей), если прямые ℓ_1 и ℓ_2 заданы параметрически.

Задача 2.11. Составьте параметрическое уравнение прямой в $\mathbb{A}^3$, проходящей через точку $(2, 3, 1)$ параллельно плоскости $x - y - 1 = 0$ и пересекающей ось Oy .

Задача 2.12. Найдите уравнения прямой, которая лежит в плоскости $x + z = 0$, пересекает прямую

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-8}{11} = \frac{z-3}{2},$$

но не имеет общих точек с прямой $x = 1 + t$, $y = 3 + 4t$, $z = -1 - t$.

Задача 2.13. Даны три прямые

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \{x = 3 + t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 4t\}, \\ \ell_2 &= \{x = -2 + 3t, \quad y = -1, \quad z = 4 - t\}, \\ \ell_3 &: \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Найдите уравнения прямой, которая пересекает ℓ_1, ℓ_2 и параллельна ℓ_3 .

Задача 2.14. Найдите уравнения прямой, проходящей через точку $(1, 2, 3)$ и пересекающей прямые

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}, \quad \frac{x}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z}{3}.$$

Задача 2.15. Покажите, что три плоскости $x + 2y - z - 4 = 0$, $3x - 2y + 3z - 6 = 0$ и $4y - 3z + 3 = 0$ образуют призму, и напишите уравнение плоскости, которая проходит через линию пересечения первых двух граней призмы и параллельна третьей грани.

Задача 2.16. *Собственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей в $\mathbb{A}^3$, проходящих через фиксированную прямую. *Несобственным пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной плоскости. Аналогично определяются пучки прямых в $\mathbb{A}^2$.

Докажите, что плоскость $F = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит пучку плоскостей, определяемому двумя несовпадающими плоскостями $F_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $F_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$, где $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$. Аналогично для пучков прямых.

Задача 2.17. *Собственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей в $\mathbb{A}^3$, проходящих через фиксированную точку. *Несобственной связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, параллельных данной прямой.

Докажите, что плоскость $F = Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит связке плоскостей, определяемой тремя плоскостями $F_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, не принадлежащими одному пучку тогда и только тогда, когда $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3$, или, эквивалентно,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A & B & C & D \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 2.18. Опишите все возможные способы взаимного расположения двух плоскостей в $\mathbb{A}^5$.

Задача 2.19. Пусть даны два аффинных подпространства $\mathfrak{B} = P + W$ и $\mathfrak{C} = Q + U$ в $\mathbb{A}^n$. В терминах точек P, Q и линейных пространств W, U запишите необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ пересекались (имели хотя бы одну общую точку).

Задача 2.20. Пусть заданы два аффинных подпространства $\mathfrak{B} = P + \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5 \rangle$ и $\mathfrak{C} = Q + \langle \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3 \rangle$ в аффинном пространстве, причём $\dim \mathfrak{B} = 5$ и $\dim \mathfrak{C} = 3$. С помощью рангов r и R систем векторов $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ и $\{\overline{PQ}, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ выразить необходимые и достаточные условия того, чтобы данные подпространства

- а) скрещивались по точке; б) пересекались в одной точке;
- в) скрещивались по прямой; г) пересекались по прямой;
- д) скрещивались по двумерной плоскости; е) пересекались по двумерной плоскости;
- ж) были параллельны; з) совпадали.