Многочлены и симметрические многочлены.

Задача 1. а) Докажите, что многочлен $\dfrac{x^{p^k}-1}{x^{p^{k-1}}-1}$ – неприводим для любого простого p.

б) Пусть $I \subseteq R$ — собственный идеал в кольце без делителей нуля, и пусть $p(x) \in R[x]$ — непостоянный многочлен со страшим коэффициентом равным единицей. Покажите, что если образ $p(x)$ в $(R/I)[x]$ неприводим, то $p(x)$ неприводим в $R[x]$.

в) Покажите, что x^2+xy+1 неприводим в $\mathbb{Z}[x,y]$.

г) Покажите, что многочлен $1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^{2025}}{2025!}$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 2. а) Покажите, что если многочлен $p(x_1,\ldots,x_n) \in \Bbbk[x_1,\ldots,x_n]$ над бесконечным полем $\Bbbk$ обращается в нуль во всех точках гиперплоскости $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b=0$, то он делится на $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b$.

б) Разложите на множители многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Задача 3. а) Найдите дискриминант многочлена x^3+px+q.

б) Сколько вещественных корней у многочлена $x^3-1.1x^2-1.2x+1.2$?

в) При каких значениях $\lambda \in \mathbb{C}$ многочлен $x^4-4x+\lambda$ имеет кратный корень?

Задача 4. Пусть $E(t)=\prod_{i=1}^n(1+x_it), H(t)=\prod_{i=1}^n \dfrac{1}{1-x_it}$.

а) Пользуясь равенством $E(t)H(-t)=1$ докажите, что $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}=\Bbbk[h_1,\ldots,h_n]$.

б) Пусть $P(t)=\sum_{k=1}^\infty p_kt^k$, где $p_k=\sum_{i=1}^n x_i^k$. Пользуясь равенством $P(t)=\dfrac{H'(t)}{H(t)}$ докажите, что $\Bbbk[x_1,\ldots,x_n]^{S_n}=\Bbbk[p_1,\ldots,p_n]$.

Задача 5. а) Докажите, что

$$s_\lambda(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n)=\sum_{\mu\preceq\lambda} s_\mu(x_1,\ldots,x_{n-1})x_n^{|\lambda|-|\mu|}.$$

Суммирование ведётся по таким μ, что $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n$.

б) Докажите, что

$$s_\lambda(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{T\in SSYT(\lambda)} x^T,$$

$x^T=x_1^{t_1}\ldots x_n^{t_n}$, где t_n – это сколько раз встречается число n в полустандартной таблице T. Здесь полустандартная таблица – это заполнение диаграммы Юнга λ числами от 1 до n таким образом, что по столбцам числа строго возрастают, а по строкам возрастают нестрого.

в) Покажите, что число полустандартных таблиц равно

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i}$$

г*) Покажите, что число полустандартных таблиц равно

$$\prod_{\square\in\lambda}\frac{n+c(\square)}{h(\square)},$$

где произведение берётся по всем клеткам диаграмы Юнга, $c(\square)=j-i$ (i - номер строки, j - номер столбца клетки в диаграмме Юнга λ) – содержание клетки, $h(\square)$ - длина крюка, проходящего через клетку.