

Симплициальные гомологии. Цепные комплексы

Задача 1.1. Докажите, что $H_0^\Delta(\mathcal{K}) \cong \mathbb{Z}^{\oplus c}$, где c — число компонент связности пространства $|\mathcal{K}|$.

Задача 1.2. Опишите гомологии а) несвязного объединения; б) букета симплициальных комплексов.

Задача 1.3. Вычислите гомологии какой-нибудь триангуляции¹ а) окружности; б) сферы; в*) ленты Мёбиуса.

Задача 1.4. Пусть $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ — симплициальные комплексы на множествах вершин V_1, V_2 . Их *джойн* — это $\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2 := \{I \subset V_1 \sqcup V_2 : I \cap V_1 \in \mathcal{K}_1, I \cap V_2 \in \mathcal{K}_2\}$.

а) Проверьте, что это симплициальный комплекс, причём $|\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2| \cong |\mathcal{K}_1| * |\mathcal{K}_2|$.

б) Как связаны цепные комплексы $\tilde{C}_\bullet^\Delta(\mathcal{K}_1), \tilde{C}_\bullet^\Delta(\mathcal{K}_2), \tilde{C}_\bullet^\Delta(\mathcal{K}_1 * \mathcal{K}_2)$?

Задача 1.5. Пусть V_1, V_2 — конечные линейно упорядоченные множества. Рассмотрим

$$\mathcal{P} := \{I \subset V_1 \times V_2 : \text{если } (i_1, i_2), (j_1, j_2) \in I \text{ и } i_1 < j_1, \text{ то } i_2 \leq j_2\}.$$

а) Проверьте, что это симплициальный комплекс, причём $|\mathcal{P}| \cong \Delta^{|V_1|-1} \times \Delta^{|V_2|-1}$.

б) Постройте аналогичную триангуляцию произведения симплициальных комплексов.

Задача 1.6. Пусть $C_\bullet = (0 \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0)$ — цепной комплекс конечномерных векторных пространств. Его *эйлерова характеристика* — это число $\chi(C_\bullet) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim C_i$.

а) Докажите, что $\chi(C_\bullet) = \chi(H_*(C_\bullet))$. б) Докажите “сильные неравенства Морса”:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \dim C_i \geq \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \dim H_i(C_\bullet), \quad \forall k \geq 0.$$

в*) Обобщите на комплексы конечнопорождённых абелевых групп ($\dim$ заменяется на rk).

Задача 1.7. Сколько вершин может быть у триангуляции а) S^2 ; б) $\mathbb{R}P^2$; в) $\mathbb{T}^2$?

▷ Используйте: χ не зависит от триангуляции, а каждое ребро содержится ровно в двух треугольниках.

Задача 1.8. Пусть $C_\bullet, C'_\bullet$ — цепные комплексы, A — абелева группа. Введите структуру цепного комплекса на а) $C_\bullet \oplus C'_\bullet$; б) $C_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} A$; в) $C_\bullet / C'_\bullet$, если $C'_\bullet \subset C_\bullet$ — подкомплекс.

Задача 1.9. Последовательность гомоморфизмов *точна*, если “везде образ равен ядру”. Докажите:

а) Последовательность $A \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow D$ точна $\Leftrightarrow$ она разбивается на точные последовательности $A \rightarrow B \rightarrow K \rightarrow 0, 0 \rightarrow K \rightarrow C \rightarrow D$.

б) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\text{incl}} A \oplus C \xrightarrow{\text{pr}} C \rightarrow 0$ точна, но не всякая точная пос-ть $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ такова.

в) Тем не менее, это верно, если p имеет сечение или i допускает ретракцию.

Задача 1.10. а) Пусть $C_\bullet$ — цепной комплекс конечнопорождённых свободных абелевых групп. Докажите, что он изоморфен прямой сумме комплексов вида $(0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0)$ и $(0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z} \rightarrow 0)$.

б) Пусть $C_\bullet$ — цепной комплекс векторных пространств над полем $\mathbb{F}$. Докажите, что $C_\bullet$ изоморфен прямой сумме комплексов вида $(0 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow 0)$ и $(0 \rightarrow \mathbb{F} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{F} \rightarrow 0)$.

▷ Подсказка: любой гомоморфизм $f : A \rightarrow B$ к.п. св. аб. групп имеет *нормальную форму Смита* (найдётся пара базисов, в которых f задаётся диагональной матрицей). В частности, $\text{Ker}(f) \subset A$ — прямое слагаемое.

¹Симплициального комплекса, чья геометрическая реализация гомеоморфна заданному пространству.