

Листок 4

Задача 4.1. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно-дифференцируемые в $x = 0$ функции. Докажите, что ряд Тейлора функции $f(x)g(x)$ является свёрткой Коши рядов Тейлора $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 4.2. Для всех натуральных n вычислите $\left. \frac{d^n(\sin^2 x^2)}{dx^n} \right|_{x=0}$.

Задача 4.3. Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, где X — метрическое пространство, называется гёльдеровой с показателем α , если

$$|f(x) - f(y)| \leq C\rho(x, y)^\alpha.$$

Докажите, что гёльдерова функция на отрезке $[0, 1]$ с показателем $\alpha > 1$ является постоянной.

Задача 4.4. Будем говорить, что бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится к $P \neq 0$, если

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N a_n = P.$$

(если $P = 0$, то говорят, что произведение *расходится к нулю*)

а) Докажите, что если бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

б) Докажите, что $e^x \geq 1 + x$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ при $x < 1$.

в) Пусть $a_n \in \mathbb{R}$ и $\sum_n a_n^2$ сходится. Докажите, что бесконечное произведение $\prod_n (1 + a_n)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_n a_n$. Верно ли это без предположения о сходимости ряда из квадратов?

Задача 4.5. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Докажите, что $\tilde{\rho}(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$ тоже задаёт метрику на X и что топологии на (X, ρ) и $(X, \tilde{\rho})$ совпадают.

Задача 4.6. Докажите, что выпуклая функция на интервале непрерывна. Всегда ли она дифференцируема?

Задача 4.7. Пусть $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

а) Найдите максимум функции $f(y) = xy - y^p$ при $y > 0$, где $x > 0$.

б) Докажите, что для вещественных x_i, y_i выполнено неравенство

$$(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} (|y_1|^q + \dots + |y_n|^q)^{1/q} \geq x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Задача 4.8*. Для натурального n определим

$$\varphi_n = \left(1 + n + \dots + \frac{n^n}{n!} \right) e^{-n}.$$

Докажите, что последовательность φ_n сходится.

Указание: Рассмотрите функцию $f(x) = \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$