8. ЛЕКЦИЯ 8. КАРТАНОВСКИЕ ПОДАЛГЕБРЫ. КОРНЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ.

Все алгебры Ли в этой лекции конечномерные и над полем $\mathbb{C}$.

8.1. Картановские подалгебры.

Определение 8.1. Картановская подалгебра это торическая подалгебра $\mathfrak{h}$ для которой $\mathfrak{h} = C(\mathfrak{h})$.

Примеры. Диагональные матрицы в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ являются картановской подалгеброй.

Предложение 8.2. Максимальная торическая подалгебра является картановской. В частности, картановские подалгебры существуют.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{h}$ максимальная торическая подалгебра. Достаточно показать, что в этом случае $C(\mathfrak{h})$ тоже торическая.

1) Покажем, что $\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{h})$ – абелева. Пусть $x \in C(\mathfrak{h})$ и $x = x_s + x_n$ – абстрактное разложение Жордана. Тогда $x_s, x_n \in C(\mathfrak{h})$. Пусть $x_s \notin \mathfrak{h}$. Тогда $[x_s, h] = 0 \forall h \in \mathfrak{h}$, значит, $\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}x_s$ торическая, но $\mathfrak{h}$ – максимальная торическая, значит, $x_s \in \mathfrak{h}$. Из сказанного выше $\text{ad } x_s : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ нулевой оператор, а значит $\text{ad } x = \text{ad } x_n$. По теореме Энгеля $C(\mathfrak{h})$ – нильпотентна. Более того, $C(\mathfrak{h})$ – редуктивна, а значит абелева.

2) Покажем, что $C(\mathfrak{h})$ состоит из полупростых элементов. Пусть $x \in C(\mathfrak{h})$ и $x = x_s + x_n$ – абстрактное разложение Жордана. Тогда для любого $y \in C(\mathfrak{h})$ оператор $\text{ad } x_n \circ \text{ad } y$ – нильпотентен, значит $K(x_n, y) = 0$. Но ограничение K на $C(\mathfrak{h})$ невырождено, значит, $x_n = 0$ и $x = x_s$. □

Пусть G (некоторая) соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группа Ли.

Теорема 8.3. Все подалгебры Картана полупростой алгебры Ли сопряжены. Иными словами, если $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ – подалгебры Картана, то существует $g \in G$ такой, что $\text{Ad } g(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$.

Доказательство. У нас без доказательства. См. Кац, Лекция 9. □

8.2. Классификация представлений $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

8.3. Классификация представлений $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Пусть V – произвольное неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Напомним стандартный базис $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и коммутационные соотношения

$$[h, e] = 2e, [h, f] = -2f, [e, f] = h$$

Тогда найдём вектор $v \in V$ – собственный для h с собственным значением μ . Заметим, что тогда вектор $e \cdot v$ – собственный с собственным значением $\mu + 2$:

$$h(ev) = eh \cdot v + [h, e] \cdot v = \mu ev + 2ev = (\mu + 2)ev.$$

Тогда вектор e^2v будет собственным с собственным значением $\mu + 4$ и т. д. Так как представление V конечномерно, то существует такой собственный для h вектор v , что $ev = 0$. Пусть $hv = \lambda v$.

Определение 8.4. Пусть V представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и $v \in V$ такой, что

$$ev = 0$$

$$hv = \lambda v$$

Тогда v называется вектором старшего веса, а число λ – старшим весом представления V .

Так как представление V неприводимо, то применяя $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ к v получим всё пространство V . Выберем базис в $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ из мономов вида $f^k h^s e^l$. Тогда получим, что $V = \text{span} \langle f^i v \mid i \geq 0 \rangle$. Заметим, что вектор $f^k v$ является собственным с собственным значением $\lambda - 2k$. Значит, существует такое k , что $f^{k+1} v = 0$. Таким образом

$$V = \text{span} \langle f^i v \mid k \leq i \leq 0 \rangle$$

Отметим, что элементы $f^i v, k \leq i \leq 0$ образуют базис V , так как $f^i v$ является собственным вектором для h с собственным значением $\lambda - 2i$.

Теперь заметим, что из соотношения $[e, f] = h$ следует, что $\text{Tr } h = 0$ в представлении V . Действительно, след коммутатора любых двух матриц равен нулю. След h равен

$$\sum_{i=0}^k (\lambda - 2i) = (k+1)\lambda - k(k+1) = (k+1)(\lambda - k).$$

Отсюда получаем, что $\lambda = k$. Значит $\lambda = \dim V - 1$. Но все такие представления это $S^k \mathbb{C}^2$.

Предложение 8.5. Любое неприводимое комплексное представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ имеет вид $S^k \mathbb{C}^2$ для некоторого $k \geq 0$. Если размерность представления равна n , то представление порождено старшим вектором веса $n - 1$.

Будем обозначать неприводимое конечномерное представление со старшим весом λ через V_λ . Наша цель – доказать что любое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимо.

Лемма 8.6 (Лемма Шура). Пусть V – неприводимое комплексное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\psi : V \rightarrow V$ – морфизм представлений. Тогда $\psi = \lambda \cdot \text{id}_V, \lambda \in \mathbb{C}^*$.

Замечание. Лемма Шура даёт доказательство единственности разложения на неприводимые представления.

Пусть (V, ρ) – произвольное представление. Рассмотрим $\rho(C) = \frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(e)\rho(f) + \rho(f)\rho(e) = \frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(h) + 2\rho(f)\rho(e)$. Непосредственная проверка позволяет увидеть, что $\rho(C) : V \rightarrow V$ определяет морфизм представления V . По лемме Шура, в неприводимом представлении V_λ он действует скаляром. Найдём этот скаляр. Для этого подействуем элементом $\rho(C)$ на старший вектор:

$$\rho(C)v_\lambda = \left(\frac{1}{2}\rho(h)^2 + \rho(h) + 2\rho(f)\rho(e) \right) v_\lambda = \frac{\lambda(\lambda + 2)}{2} v_\lambda$$

Отметим, что собственные значения C различны на различных неприводимых представлениях.

Теорема 8.7. Конечномерные представления $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимы.

Доказательство. Пусть V – неразложимое представление минимальной размерности, которое не является суммой представлений меньших размерностей. Тогда элемент C действует на V с единственным собственным значением. Действительно, рассмотрим разложение

$$V = \bigoplus V^{(\mu)},$$

где $V^{(\mu)}$ – корневое подпространство для элемента C . Так как C – центральный, то каждое $V^{(\mu)}$ – подпредставление. Если в этом разложении участвует больше чем одно $V^{(\mu)}$, то это противоречит неразложимости представления V .

Отметим, что из рассуждения выше следует, что в композиционном ряде для V участвуют только неприводимые представления вида V_λ для некоторого $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Лемма 8.8. Корневое подпространство элемента h для собственного значения λ с максимальной действительной частью является собственным.

Доказательство. Пусть $V(\lambda)$ – корневое подпространство с собственным значением элемента h с максимальной действительной частью. Тогда мы утверждаем, что для любого $v \in V(\lambda)$ верно, что $ev = 0$, а также существует $n > 0$, что $f^n v = 0$.

Заметим, что в $U(\mathfrak{sl}_2)$ верны следующие равенства

$$he = e(h + 2), hf = f(h - 2)$$

Это означает, что для любого многочлена от h

$$p(h)e = ep(h + 2), p(h)f = fp(h - 2),$$

а значит вектор ev принадлежит корневому пространству с собственным значением $\lambda + 2$, а $f^n v$ с собственным значением $\lambda - 2n$. Тогда из максимальной действительной части λ получаем $ev = 0$, а из конечномерности существование такого n , что $f^n v = 0$.

Теперь пусть $v \neq 0 \in V$ такой, что $ev = 0$. Тогда из равенства в $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

$$ef^k = kf^{k-1}(h + 1 - k) + f^k e$$

следует, что

$$ef^k v = kf^{k-1}(h + 1 - k)v$$

А тогда получаем, что

$$e^k f^k v = ke^{k-1} f^{k-1} (h+1-k)v = k(k-1)e^{k-2} (h+1-k)(h+1-(k-1))v = \dots = k! \prod_{i=0}^{k-1} (h+1-(k-i))v$$

Предположим теперь, что $v \in V(\lambda)$. Пусть n такое, что $f^n v = 0$. Тогда

$$0 = e^n f^n v = \prod_{i=0}^{n-1} (h + 1 - (n - i))v$$

Заметим, что многочлен от h в правой части не имеет кратных корней. Это означает, что вектор v обязан быть собственным. Таким образом $V(\lambda)$ – на самом деле собственное подпространство с собственным значением λ . Более того, $\lambda \in \mathbb{Z}_{>0}$. $\square$

Пусть $V_\lambda \subset V$ неприводимое подпредставление порождённое некоторым вектором из $V(\lambda)$. Так как размерность V минимальна, то $V/V_\lambda \simeq mV_\lambda$ для некоторого m . Тогда корневое пространство элемента h с собственным значением λ является собственным размерности $m + 1$. Пусть $v_1, \dots, v_{m+1}$ – базис $V(\lambda)$. Мы утверждаем, что элементы $f^j v_i, i = 1, \dots, m + 1, 0 \leq j \leq \lambda$ образуют базис V . Заметим, что элементы $f^j v_i$ для фиксированного j являются собственными с собственным значением $\lambda - 2j$. Достаточно проверить линейную независимость элементов с одним и тем же $j \geq 1$. Пусть

$$\sum c_i f^j v_i = 0 = f \left(\sum c_i f^{j-1} v_i \right)$$

Обозначим $w = \sum c_i f^{j-1} v_i$. Тогда $fw = 0, hw = \mu w, \mu = \lambda - 2(j - 1)$. Тогда если $C = \frac{1}{2}h^2 - h + 2ef$ – элемент Казимира для $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, то $Cw = \frac{\mu(\mu-2)}{2}$. С другой стороны элемент Казимира имеет на V лишь собственное значение $\frac{\lambda(\lambda+2)}{2}$. Отсюда следует, что $\mu = -\lambda$ или $\mu = \lambda + 2$. Так как λ – максимальное собственное значение, то $\mu = -\lambda$. Это означает, что $j = \lambda + 1$. Отсюда получаем линейную независимость и разложение в прямую сумму подпредставлений вида $\text{span}\langle v_i, f v_i, \dots, f^\lambda v_i \rangle$. Получили противоречие, которое доказывает теорему. $\square$

8.4. Корневое разложение. Пусть $\mathfrak{h}$ – подалгебра Каратна полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Здесь $\Phi = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$.

Изучим это разложение подробнее. Во первых, отметим, что ограничение форму Киллинга на K – невырождено. Будем в дальнейшем обозначать его черех $(\cdot, \cdot)$. Невырожденность позволяет отождествить

$$\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h} \quad \alpha \mapsto H_\alpha \quad (H_\alpha, h) = \alpha(h) \ \forall h \in \mathfrak{h}$$

Более того, мы перенесём форму $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{h}^*$ по правилу

$$(\alpha, \beta) = (H_\alpha, H_\beta) = \alpha(H_\beta) = \beta(H_\alpha) \ \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$$

Лемма 8.9. Пусть $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, f_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Тогда $[e_\alpha, f_{-\alpha}] = (e_\alpha, f_{-\alpha})H_\alpha$.

Доказательство. $([e_\alpha, f_{-\alpha}], h) = (f_{-\alpha}, [h, e_\alpha]) = \alpha(h)(e_\alpha, f_{-\alpha}) = (H_\alpha, h)(e_\alpha, f_{-\alpha}) = ((e_\alpha, f_{-\alpha})H_\alpha, h)$. $\square$

Напомним, что существуют $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, f_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $(e_\alpha, f_{-\alpha}) \neq 0$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{sl}_2^\alpha = \langle e_\alpha, f_{-\alpha}, H_\alpha \rangle$. Имеем следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{cases} [e_\alpha, f_{-\alpha}] = (e_\alpha, f_{-\alpha})H_\alpha \\ [H_\alpha, e_\alpha] = \alpha(H_\alpha)e_\alpha = (\alpha, \alpha)e_\alpha \\ [H_\alpha, f_{-\alpha}] = -(\alpha, \alpha)f_{-\alpha} \end{cases}$$

Если $(\alpha, \alpha) \neq 0$, то выберем такие $e_\alpha, f_{-\alpha}$, что $(e_\alpha, f_{-\alpha})(\alpha, \alpha) = 2$ и построим отображение

$$\mathfrak{sl}_2^\alpha \rightarrow \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), h_\alpha := \frac{2}{(\alpha, \alpha)}H_\alpha \mapsto h, e_\alpha \mapsto e, f_{-\alpha} \mapsto f$$

Легко видеть, что это изоморфизм. Осталось показать, что

Лемма 8.10. $\forall \alpha \in \Phi \ (\alpha, \alpha) \neq 0$.

Доказательство. Пусть $(\alpha, \alpha) = 0$ отсюда $\alpha(H_\alpha) = 0$. Выберем $e \in \mathfrak{g}_\alpha, f \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $(e, f) \neq 0$ и положим $h = [e, f] = (e, f)H_\alpha$. Тогда $[h, e] = [h, f] = 0$, а значит подалгебра $\langle e, f, h \rangle \subset \mathfrak{g}$ – разрешима. Тогда по теореме Ли операторы $\text{ad } e, \text{ad } f, \text{ad } h$ – верхнетреугольные в некотором базисе, более того, $\text{ad } h = [\text{ad } e, \text{ad } f]$ – строго верхнетреугольный. Получаем, что $\text{ad } h$ – полупрост и нильпотентен одновременно, значит, $h = 0$. Но $(e, f) \neq 0$, откуда получаем противоречие. $\square$

Таким образом, для любого α имеем подалгебру $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ изоморфную $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Это позволяет получить подробную информацию о корневом разложении алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Лемма 8.11. Для любого $\alpha \in \Phi$ подпространство $V_\alpha = \mathbb{C}h_\alpha \oplus \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{k\alpha}$ является трёхмерным неприводимым представлением алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2^\alpha$, точнее, $\mathfrak{g}_{k\alpha} \neq 0 \iff k = \pm 1$.

Доказательство. $\text{ad } h_\alpha$ переводит $\mathfrak{g}_{k\alpha}$ в себя, $\text{ad } e_\alpha : \mathfrak{g}_{k\alpha} \rightarrow \mathfrak{g}_{(k+1)\alpha}$, $\text{ad } f_\alpha : \mathfrak{g}_{k\alpha} \rightarrow \mathfrak{g}_{(k-1)\alpha}$, значит, $V_\alpha \subset \mathfrak{g}$ – подпредставление. Более того, все веса V_α чётные, и $\dim V_\alpha[0]$, весового пространства веса 0, равна 1, значит V_α неприводимо. Учитывая, что $\mathfrak{sl}_2^\alpha \subset V_\alpha$ является подпредставлением получаем, что $V_\alpha = \mathfrak{sl}_2^\alpha$ что завершает доказательство леммы. $\square$

Теорема 8.12. (1) Линейная оболочка Φ совпадает с $\mathfrak{h}^*$.

(2) $\forall \alpha \in \Phi \ \dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.

(3) $\forall \alpha, \beta \in \Phi \ \beta(h_\alpha) = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$.

- (4) $\forall \alpha \in \Phi$ определим линейный оператор $s_\alpha : \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}^*$, $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \lambda(h_\alpha)\alpha = \lambda - 2\frac{(\alpha, \lambda)}{(\lambda, \lambda)}$. Тогда $s_\alpha(\Phi) \subset \Phi$.
- (5) Если $\alpha \in \Phi, k\alpha \in \Phi$, то $k = \pm 1$.
- (6) Если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$, то $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Доказательство. (1) Если $h \in \mathfrak{h}$ такой, что $\alpha(h) = 0 \forall h \in \mathfrak{h}$, то $\text{ad } h = 0$, тогда $h = 0$, так как h – полупростой.

- (2) Следует из леммы, так как V_α – неприводимое представление $\mathfrak{sl}_2^\alpha$.
- (3) Вес $\mathfrak{g}_\beta$ относительно $\mathfrak{sl}_2^\alpha$ равен $\beta(h_\alpha)$, а значит это число целое.
- (4) Пусть $n = \beta(h_\alpha) > 0$. Подпространство $\mathfrak{g}_\beta$ имеет вес n относительно $\mathfrak{sl}_2^\alpha$. Тогда оператор $(\text{ad } f_\alpha)^n : \mathfrak{g}_\beta \rightarrow \mathfrak{g}_{\beta-n\alpha}$ изоморфизм ($\mathfrak{g}_{\beta-n\alpha}$ имеет вес $-n$). Значит, $\mathfrak{g}_{\beta-n\alpha} \neq 0$, откуда $\beta - n\alpha \in \Phi$. Если $n < 0$, то используем $\text{ad } e_\alpha$.
- (5) Следует из леммы, так как $\dim V_\alpha = 3$.
- (6) Рассмотрим $W_\beta = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$. $\text{ad } h_\alpha$ переводит $\mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$ в себя, $\text{ad } e_\alpha : \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \rightarrow \mathfrak{g}_{\beta+(k+1)\alpha}$, $\text{ad } f_\alpha : \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha} \rightarrow \mathfrak{g}_{\beta+(k-1)\alpha}$. значит, $W_\beta \subset \mathfrak{g}$ – подпредставление относительно $\mathfrak{sl}_2^\alpha$. Отсюда $\text{ad } e_\alpha : \mathfrak{g}_\beta \rightarrow \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ – изоморфизм (заметим, что легко доказать неприводимость W_β).

□

8.5. Положительная определённость формы Киллинга. Абстрактные системы корней. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi$ – базис $\mathfrak{h}^*$. Тогда если $\beta \in \Phi$, то существует единственный набор чисел $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ такой, что $\beta = \sum_i c_i \alpha_i$.

Лемма 8.13. $c_i \in \mathbb{Q}$

Доказательство. Заметим, что $(\alpha_j, \beta) = \sum_i c_i (\alpha_i, \alpha_j)$ для любого $j = 1, \dots, n$. Домножим каждое уравнение на $\frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)}$ получим

$$\frac{2(\alpha_j, \beta)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \sum_i c_i \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}.$$

В левой и правой части уравнений стоят целые числа, а матрица коэффициентов невырождена (матрица Грама формы Киллинга). Отсюда получаем требуемое.

□

Более того, рассмотрим вещественную линейную оболочку корней $E = \mathbb{R}\Phi$. Тогда ограничение формы Киллинга на E принимает вещественные значения и положительно определена. Действительно, если $\alpha, \beta \in \Phi$, то

$$(\alpha, \beta) = K(H_\alpha, H_\beta) = \text{tr}_{\mathfrak{g}}(\text{ad } H_\alpha \circ \text{ad } H_\beta) = \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(H_\alpha)\gamma(H_\beta).$$

В частности,

$$(\alpha, \alpha) = \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(H_\alpha)^2$$

Домножим это равенство на $\left(\frac{2}{(\alpha, \alpha)}\right)^2$:

$$\frac{4}{(\alpha, \alpha)} = \sum_{\gamma \in \Phi} \gamma(h_\alpha)^2$$

Заметим, что в правой части равенства стоят целые числа, откуда получаем, что $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Q}$. Отсюда и $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}$ (например, из поляризации).

Определение 8.14. Пусть E – евклидово пространство, $\Phi \subset E \setminus \{0\}$ – конечное множество. Множества Φ называется системой корней, если

- (1) $\langle \Phi \rangle = E$

(2) $\alpha \in \Phi, k\alpha \in \Phi \implies k = \pm 1$.

(3) Для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ верно, что $s_\alpha(\beta) = \alpha - \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \Phi$.

(4) Для любых $\alpha, \beta \in \Phi$ $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Выше мы доказали, что набор ненулевых функционалов в корневом разложении полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}$ определяет евклидово пространство E с системой корней Φ . Оказывается, соответствие

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \rightarrow (E, \Phi)$$

биективно.