Матрицы, метод Гаусса.

Задача 1. Докажите, что для любых матриц $A \in Mat_{n\times l}(\Bbbk), B \in Mat_{l\times k}(\Bbbk), C \in Mat_{k\times m}(\Bbbk)$ выполнены следующие неравенства:

а) $\operatorname{rk}(AB) \leqslant min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$; **б)** $\operatorname{rk}(AB) + \operatorname{rk}(BC) \leqslant \operatorname{rk}(ABC) + \operatorname{rk}(B)$; **в)** $\operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(B) \leqslant rk(AB) + l$.

Задача 2. Имеются семь одинаковых банок, каждая из которых на девять десятых заполнена краской одного из семи цветов радуги (в каждой банке — свой цвет, и все цвета разные). Можно ли, переливая краску из банки в банку (и равномерно размешивая содержимое), получить хотя бы в одной из банок колер, в котором все семь красок смешаны в равной пропорции?

Задача 3. а) Найдите матрицу $A \in M_2(\mathbb{Z}) \subseteq M_2(\mathbb{Q})$ с минимальным многочленом равным $x^2 - 2$. Докажите, что $\mathbb{Q}[A]$ — поле.

б) Найдите такую матрицу $A \in M_2(\mathbb{R})$, что $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{C}$. Явно опишите $\mathbb{R}[A]$.

в) Найдите минимальный многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Задача 4. а) Найдите размерность клетки Шуберта в $Gr(k, n)$, отвечающей диаграмме Юнга λ.
б) Перечислите клетки Шуберта в $Gr(2, 4)$ и найдите их размерности.
в) Докажите, что

$$\binom{n}{k}_q = q^{k(n-k)} \sum_{\lambda} q^{-|\lambda|},$$

где суммирование идёт по всем диаграммам Юнга в прямоугольнике $k(n-k)$, $|\lambda|$ – это число клеток в диаграмме Юнга.

Задача 5. а) Докажите, что для любой $A \in M_n(\Bbbk)$ существует матрица перестановки B_σ (см. задачу 5 листка 7) такая, что $A = LUB_\sigma$, где L – нижнетреугольная, а U – верхнетреугольная матрицы. **б*)** Найдите необходимые и достаточные условия для существования разложения с $B_\sigma = E$ (LU-разложение).

Задача 6*. а) Пусть $A \in GL_n(\Bbbk)$. Докажите, что существуют $U, D, L \in M_n(\Bbbk)$ – верхнетреугольная, диагональная и нижнетреугольные матрицы соответственно, а также матрица перестановки A_σ (см. задачу 5 листка 7) такие, что

$$A = A_\sigma UDL$$

При этом матрицы U, D, L определены однозначно.
б) При каких условиях на матрицу A существует разложение $A = UDL$?
в) Являются ли эти условия достаточными?