ТОПОЛОГИЯ–1
ЛИСТОЧЕК 6: ГОМОТОПИИ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. а) Докажите, что если $f_1 \simeq f_2$, то $f_1 \circ g \simeq f_2 \circ g$ и $h \circ f_1 \simeq h \circ f_2$ для любых g и h. В частности, отображение $f\colon X \to Y$ корректно индуцирует отображения $f_*^Z\colon [Z, X] \to [Z, Y]$ и $f_Z^*\colon [X, Z] \to [Y, Z]$.

б) Докажите, что если X стягиваемо, то любое отображение $\mathrm{pt} \to X$ является гомотопической эквивалетностью.

в) Докажите, что антидискретное пространство всегда стягиваемо. Когда стягиваемо дискретное пространство?

г) Докажите, что пространство X стягиваемо тогда и только тогда, когда для любого пространства Y все отображения $X \to Y$ гомотопны. Аналогично для отображений $Z \to X$. В частности, стягиваемые пространства линейно связны.

д) Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ является гомотопической эквивалентностью $\Leftrightarrow$ для любого Z отображение $f_*^Z\colon [Z, X] \to [Z, Y]$ является биекцией. Аналогично для отображений f_Z^*.

2. а) Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *звёздным*, если в нём существует точка $x \in X$, такая что для любой другой точки $y \in X$ весь отрезок $[x, y]$ лежит в X. Докажите, что звёздные подмножества стягиваемы.

б) Докажите, что если для двух отображений $f\colon X \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ и $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ выполнено $|f(x)| > |g(x)|$ (для всех $x \in X$), то отображения f и $f+g\colon X \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ гомотопны.

в) Докажите, что любые два отображения $f, g\colon X \to S^n$, такие что $f(x) \neq -g(x)$ (для всех $x \in X$), гомотопны.

В частности, если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не имеет неподвижных точек, то есть, $f(x) \neq x$, то оно гомотопно антиподальной симметрии $x \mapsto -x$.

г) Докажите, что если на сфере S^n существует ненулевое непрерывное касательное векторное поле, то тождественное отображение $\mathrm{id}\colon S^n \to S^n$ гомотопно антиподальной симметрии.

д) Докажите, что любое отображение $S^n \to S^n$ гомотопно отображению, имеющему (хотя бы одну) неподвижную точку.

3. а) Докажите, что отображение факторизации $p\colon (X, A) \to (X/A, *)$ индуцирует биекцию $p^*\colon [(X/A, *), (Y, y)] \cong [(X, A), (Y, y)]$.

б) Докажите, что композиция с проекциями задаёт естественную биекцию $[(X, A), (\prod Y_\alpha, \prod B_\alpha)] \cong \prod [(X, A), (Y_\alpha, B_\alpha)]$.

4. Для пространства X его *n-ой симметрической степенью* называется фактор-пространство

$$Sym^n(X) = (\underbrace{X \times \ldots \times X}_{n \text{ раз}})/S_n$$

декартовой степени по действию симметрической группы S_n, переставляющему сомножители, то есть, $(x_1, \ldots, x_n) \sim (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$. Докажите, что

а) $Sym^n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^n$;

б) $Sym^n(\mathbb{C}P^1) \cong \mathbb{C}P^n$;

в) $Sym^2(S^1) \cong M$ — лента Мёбиуса;

г) $Sym^n(S^1) \simeq S^1$.

5. Далее под деформационными ретрактами подразумеваются всегда *строгие* деформационные ретракты (т.е. гомотопия неподвижна на ретракте).

Докажите, что

а) если $A \subset X$ и $B \subset Y$ — деформационные ретракты, то $A \times B \subset X \times Y$ — тоже деформационный ретракт;

б) дополнение до точки в любой поверхности деформационно ретрагируется на букет окружностей. Сколько окружностей в букете?

в) дополнение до точки в проективном пространстве $\mathbb{R}P^n - \{x\}$ деформационно ретрагируется $\mathbb{R}P^{n-1}$. То же для $\mathbb{C}P^n$.

г) если X — n-мерное клеточное пространство и $A \subset X$ — подмножество содержащееся в объединении открытых клеток старшей степени X, причём в каждой такой клетке e^n_α лежит не более одной точки из A, то $X - A$ деформационно ретрагируется на $X - \bigcup e^n_\alpha$ — дополнение до тех открытых клеток, которые содержат точки из A;

д) для естественных вложений $X \hookrightarrow X * Y$, $Y \hookrightarrow X * Y$ и $X \times Y \hookrightarrow X * Y$ подпространство X является деформационным ретрактом дополнения $X * Y - Y$, а $X \times Y$ — деформационным ретрактом дополнения $X * Y - (X \sqcup Y)$. То же для $X \mathbin{\bar{*}} Y$;

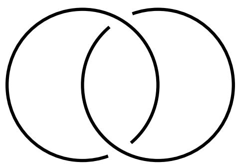
е) дополнение до (стандартно вложенной) сферы $S^k \subset S^n$ гомотопически эквивалентно S^{n-k-1};

ё) дополнение $\mathbb{R}^n - \{x_1, \ldots, x_k\}$ до k точек гомотопически эквивалентно букету $\bigvee\limits_{i=1}^{k} S^{n-1}$ из k сфер;

ж) дополнение $\mathbb{R}^{n+1} - \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ до k прямых, проходящих через 0, гомотопически эквивалентно букету $\bigvee\limits_{i=1}^{2k-1} S^{n-1}$;

з) полноторие $S^1 \times D^2$ без внутренней точки $p \in S^1 \times D^2 - S^1 \times \partial D^2$ гомотопически эквивалентно букету $S^2 \vee S^1$;

и) дополнение до зацепления Хопфа в S^3 гомотопически эквивалентно тору $S^1 \times S^1$;



к) дополнение до зацепления Хопфа в $\mathbb{R}^3$ гомотопически эквивалентно букету $S^2 \vee S^1 \times S^1$;

л) дополнение до двух незацепленных окружностей в S^3 гомотопически эквивалетно букету $S^2 \vee S^1 \vee S^1$;

м) дополнение до двух незацепленных окружностей в $\mathbb{R}^3$ гомотопически эквивалетно букету $S^2 \vee S^2 \vee S^1 \vee S^1$;

н) дополнение до (стандартно вложенной) сферы $S^k \subset \mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно букету $S^{n-1} \vee S^{n-k-1}$;

о) группа $GL_n(\mathbb{R})$ деформационно ретрагируется на подгруппу $O(n)$, а группа $GL_n(\mathbb{C})$ — на подгруппу $U(n)$.

п) Чему гомотопически эквивалентно дополнение до двух скрещивающихся прямых в $\mathbb{R}^3$? А дополнение до двух пересекающихся по одной точке двумерных плоскостей в $\mathbb{R}^4$?

6. а) Докажите, что ретракт стягиваемого пространства является стягиваемым. Верно ли, что при любом непрерывном отображении образ стягиваемого пространства стягиваем? Верно ли, что если пространство X ретрагируется на стягиваемое подпространство $A \subset X$, то X само стягиваемо?

б) Проверьте, что слагаемые X и Y являются ретрактами букета $X \vee Y$.

в) Докажите, что для хаусдорфова пространства любой его ретракт является замкнутым.

г) Докажите, что если $A \subset X$ является ретрактом X и любое отображение X в себя имеет неподвижные точки, то и любое отображение A в себя имеет неподвижные точки.

д) Докажите, что любое отображение букета $X \vee Y$ в себя имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда любые отображения X и Y в себя имеют неподвижные точки.

е) Существует ли непрерывное отображение открытого шара в себя без неподвижных точек?

ё) Докажите, что конечные деревья (связные графы без циклов) не допускают непрерывного отображения в себя без неподвижных точек. Можно ли здесь убрать условия связности или отсутствия циклов?

7. Нормальное пространство X называется *абсолютным ретрактом*, если оно является ретрактом любого нормального пространства, в которое оно вкладывается в качестве замкнутого подпространства.

Нормальное пространство X называется *абсолютным окрестностным ретрактом*, если оно является ретрактом некоторой своей окрестности в любом нормальном пространстве, в которое оно вкладывается в качестве замкнутого подпространства.

а) Докажите, что нормальное пространство X является абсолютным ретрактом $\Leftrightarrow$ для любого нормального Y, его замкнутого $A \subset Y$ и непрерывного $f\colon A \to X$ существует продолжение $F\colon Y \to X$.

Таким образом, теорема Титце–Урысона о продолжении (задача 26 листочка 4) равносильна тому, что отрезок и прямая являются абсолютными ретрактами.

Аналогично проверьте, что нормальное пространство X является абсолютным окрестностным ретрактом $\Leftrightarrow$ для любого нормального Y, его замкнутого $A \subset Y$ и непрерывного $f\colon A \to X$ существует продолжение $F\colon U \to X$ на некоторую окрестность $U \supset A$.

б) Проверьте, что произведение абсолютных ретрактов является абсолютным ретрактом (если это произведение нормально).

В частности, $\mathbb{R}^n$ и I^n — абсолютные ретракты.

в) Проверьте, что если X — абсолютный ретракт и $X \times I$ нормально (например, X метризуемо), то X стягиваемо.

г) Проверьте, что ретракты абсолютных ретрактов сами являются абсолютными ретрактами. Аналогично, ретракты своих окрестностей в абсолютных окрестностных ретрактах сами являются абсолютными окрестностными ретрактами.

В частности, например, сферы S^n являются абсолютными окрестностными ретрактами!

д) Пусть произведение $X \times I$ нормально (например, X метризуемо). Рассмотрим замкнутое подмножество $A \subset X$, непрерывное отображение $f\colon X \to C$ в некоторый абсолютный окрестностный ретракт C и гомотопию $F\colon A \times I \to C$ т.ч. $F(a,0) = f(a)$.

Докажите, что тогда существует продолжение этой гомотопии $\hat{F}\colon X \times I \to C$ т.е. $\hat{F}(x,0) = f(x)$ и $\hat{F}(a,t) = F(a,t)$.

8. Проверьте, что если пространство X стягиваемо, то $C(Y,X) \simeq \mathrm{pt}$ и $C(X,Y) \simeq Y$.

9. а) Докажите, что пространство S^∞ стягиваемо.

б) Для фиксированных $k \leqslant n$ рассмотрим множество $\widetilde{V}_k(n)$ всех линейно независимых наборов из k векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$. Крайние случаи: $\widetilde{V}_1(n) = \mathbb{R}^n - 0$ и $\widetilde{V}_n(n) = GL_n(\mathbb{R})$ (векторы по столбцам). Ясно, что $\widetilde{V}_k(n)$ можно отождествить с подмножеством матриц $Mat_{n\times k}(\mathbb{R})$ максимального ранга. Проверьте, что это открытое подмножество. Индуцируем на $\widetilde{V}_k(n)$ топологию с $Mat_{n\times k}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{nk}$.

Мы имеем естественные вложения $\widetilde{V}_k(n) \hookrightarrow \widetilde{V}_k(n+1)$, отправляющие набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ в тот же набор $v_1, \ldots, v_k$, но рассматриваемый уже в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ при естественном вложении $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (первые n координат).

Рассмотрим объединение $\widetilde{V}_k(\infty) = \bigcup_{n \geqslant k} \widetilde{V}_k(n)$ с топологией, порождённой включениями $\widetilde{V}_k(n) \hookrightarrow \widetilde{V}_k(\infty)$ (как множество оно состоит из всех наборов из k линейно независимых векторов в пространстве $\mathbb{R}^\infty$).

Докажите, что пространства $\widetilde{V}_k(\infty)$ стягиваемы.

в) Определим аналогично пространства $V_k(n)$, но используя ортонормированные наборы векторов вместо линейно независимых. Например: $V_1(n) = S^{n-1}$ и $V_n(n) = O(n)$. Докажите, что пространства $V_k(n)$ (для конечных $n < \infty$) компактны (в отличие от $\widetilde{V}_k(n)$, которые открыты в пространстве матриц).

Докажите, что подпространства $V_k(n) \subset \widetilde{V}_k(n)$ являются строгими деформационными ретрактами (тут уже для всех n, включая $n = \infty$). В частности, $V_k(\infty)$ также стягиваемы.

Эти пространства называются *пространствами Штифеля.*

10. а) Приведите пример пространства X и двух таких его точек x_1 и x_2, что $\{x_1\}$ является деформационным ретрактом X, а $\{x_2\}$ — нет.

б) Приведите пример стягиваемого пространства, для которого никакая его точка не является деформационным ретрактом.

11. а) Проверьте, что если $A \subset X$ и $B \subset A$ — корасслоения, то и $B \subset X$ — тоже.

б) Докажите, что если $A \subset X$ — корасслоение, то и $Y \subset X \cup_f Y$ — корасслоение для любого отображения $f\colon A \to Y$.

12. а) Приведите пример незамкнутого $A \subset X$, такого что $A \hookrightarrow X$ является корасслоением.

б) Приведите пример замкнутого $A \subset X$, не обладающего свойством продолжения гомотопии.

13. а) Проверьте, что отображения $X \to X \times I$, $x \mapsto (x,0)$ и $X \to C(I,X)$, $x \mapsto const_x$ являются корасслоениями.

б) Докажите, что для любого отображения $f\colon X \to Y$ существует такое пространство Z, что $X \subset Z$ — корасслоение и существует такая деформационная ретракция $r\colon Z \to Y$, что $r|_X = f$.

14. Пусть отображение $i\colon A \to X$ формально обладает свойством продолжения гомотопии, то есть, для любых $f\colon X \to Y$ и $F\colon A \times I \to Y$ т.ч. $F(a,0) = f(i(a))$ $\forall a \in A$ существует $\hat{F}\colon X \times I \to Y$ т.ч. $\hat{F}(i(a),t) = F(a,t)$ и $\hat{F}(x,0) = f(x)$). Докажите, что тогда i является вложением, то есть, корасслоением.

15. Докажите, что независимо от замкнутости $A \subset X$ вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением $\Leftrightarrow$ существует ретракция $X \times I \to X \times 0 \cup A \times I$.

16. Назовём подпространство $A \subset X$ *замкнутым функциональным окрестностным деформационным ретрактом*, если существует такая непрерывная функция $u\colon X \to [0;1]$, что $A = u^{-1}(0)$, и такая гомотопия $H\colon X \times I \to X$, что $H|_{X\times 0} = \mathrm{id}_X$, $\forall t \in I$ $H|_{A\times t} = \mathrm{id}_A$ и $H(V_u \times 1) \subset A$, где $V_u = \{x \in X \mid u(x) < 1\}$.

Если в качестве u можно взять такую функцию, что $u(x) < 1$ для всех $x \in X$ (то есть, $V_u = X$ и $H(X \times 1) \subset A$), то мы получаем просто определение деформационного ретракта, только при условии, что $A = u^{-1}(0)$ для какой-то функции. Назовём такую ситуацию *замкнутым функциональным деформационным ретрактом.*

а) Докажите, что если $A \subset X$ и $B \subset Y$ — замкнутые функциональные окрестностные деформационные ретракты, то и $A \times Y \cup X \times B \subset X \times Y$ — замкнутый функциональный окрестностный деформационный ретракт, причём если хотя бы один из $A \subset X$ и $B \subset Y$ — замкнутый функциональный деформационный ретракт, то и $A \times Y \cup X \times B \subset X \times Y$ — замкнутый функциональный деформационный ретракт.

б) Докажите, что включение замкнутого подмножества $A \hookrightarrow X$ является корасслоением $\Leftrightarrow$ A является замкнутым функциональным окрестностным деформационным ретрактом $\Leftrightarrow$ $X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ является замкнутым функциональным деформационным ретрактом.

В частности, если (X, A) и (Y, B) — замкнутые пары Борсука, то $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ — тоже замкнутая пара Борсука.

17. Если же подпространство $A \subset X$ не обязательно замкнуто, то назовём его *функциональным окрестностным деформационным ретрактом*, если существует такая непрерывная функция $u\colon X \to [0;1]$, что $A \subset u^{-1}(0)$, и такая гомотопия $H\colon X \times I \to X$, что $H|_{X\times 0} = \mathrm{id}_X$, $\forall t \in I$ $H|_{A\times t} = \mathrm{id}_A$ и $H(x,t) \in A$ при $t > u(x)$.

а) Проверьте, что если $A \subset X$ является функциональным окрестностным деформационным ретрактом, а также просто деформационным ретрактом, то функцию u в определении выше можно выбрать так, что $u(x) < 1$ $\forall x \in X$.

б) Докажите, что если $A \subset X$ и $B \subset Y$ — функциональные окрестностные деформационные ретракты и $A \subset X$ — замкнутое подмножество, то $A \times Y \cup X \times B \subset X \times Y$ — функциональный окрестностный деформационный ретракт, причём если хотя бы один из $A \subset X$ и $B \subset Y$ — деформационный ретракт, то и $A \times Y \cup X \times B \subset X \times Y$ — деформационный ретракт.

в) Докажите, что вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением $\Leftrightarrow$ подмножество $A \subset X$ является функциональным окрестностным деформационным ретрактом $\Leftrightarrow$ $X \times 0 \cup A \times I \subset X \times I$ является деформационным ретрактом.

В частности, если (X, A) — пара Борсука, а (Y, B) — замкнутая пара Борсука, то $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ — тоже пара Борсука. Отметим, что это неверно для двух незамкнутых пар Борсука!

Выведите, что если $A \subset X$ является корасслоением, то и замыкание $\overline{A} \subset X$ — тоже.

18. а) Докажите, что если $A \subset X$ — корасслоение, то отмеченная точка факторпространства X/A является невырожденной (то есть, её вложение является корасслоением). В частности, если пространства X и Y имеют невырожденные отмеченные точки, то пространство $X \wedge Y$ — тоже. Например, это касается приведённой надстройки $\Sigma_\bullet X$.

б) Докажите, что если K — хаусдорфов компакт, $A \subset K$ — его замкнутое подмножество, а пространство X обладает невырожденной отмеченной точкой x, то пространство $C((K,A),(X,x))$ также обладает невырожденной отмеченной точкой $const_x$. В частности, таковым будет пространство петель ΩX.

19. а) Докажите, что если $A \subset X$ является корасслоением, а отображения $f, g\colon A \to Y$ гомотопны, то пространства $X \cup_f Y$ и $X \cup_g Y$ гомотопически эквивалентны (причём относительно Y, то есть, гомотопии можно выбрать неподвижными на Y). Выведите, что если вложение $A \hookrightarrow X$ является корасслоением и гомотопно отображению в точку, то $X/A \simeq X \vee \Sigma A$.

б) Докажите, что если $A \subset X$ и $A \subset Y$ являются корасслоениями, а отображение $f\colon X \to Y$ является гомотопической эквивалентностью, причём $f|_A = \mathrm{id}_A$, то f является гомотопической эквивалентностью относительно A, то есть, существует такое $g\colon Y \to X$, $g|_A = \mathrm{id}_A$, что $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ и $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, причём гомотопии неподвижны на A.

Выведите, что если (X, A) является корасслоением и $A \hookrightarrow X$ является гомотопической эквивалентностью, то в действительности A является деформационным ретрактом пространства X. В частности, если пространство X стягиваемо, то оно деформационно ретрагируется на каждую такую свою точку $x \in X$, что вложение $\{x\} \hookrightarrow X$ является корасслоением.

Выведите отсюда, что если пространство X стягиваемо и в нём выбрана невырожденная отмеченная точка, то пространство петель ΩX в этой точке тоже стягиваемо.

20. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны и X локально стягиваемо, то и Y — тоже. То же для локальной связности и локальной линейной связности.

В частности, никакое не локально стягиваемое пространство не может быть гомотопически эквивалентно клеточному пространству. Приведите пример пространства, которое гомотопически эквивалентно клеточному пространству, но не гомеоморфно никакому клеточному пространству.

21. Докажите, что если пространства X, Y и Z имеют невырожденные отмеченные точки, то

а) $X * Y \simeq \Sigma(X \wedge Y)$;

б) $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$;

В частности, покажите, что надстройка ΣT^n над n-мерным тором гомотопически эквивалентна букету сфер. Каких и скольких сфер?

22. Докажите, что если для пространства X существует клеточное пространство Y и отображения $r\colon Y \to X$ и $i\colon X \to Y$, т.ч. $ri \simeq \mathrm{id}_X$ (X — *гомотопический ретракт* пространства Y), то пространство X гомотопически эквивалентно клеточному пространству.

23. Докажите, что если пространства X, Y и Z имеют невырожденные отмеченные точки, то $X \wedge (Y \wedge Z) \simeq (X \wedge Y) \wedge Z$. То есть, в случае невырожденных отмеченных точек смэш-произведение всегда гомотопически ассоциативно!