

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 1.
Связности. Параллельный перенос и геодезические. 06.02.2025.

Задача 1. Найти связность на стандартной сфере $\mathbb{S}^2$ радиуса 1, то есть найдите символы Кристоффеля в а) сферических и б) стереографических координатах.

Задача 2. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой (то есть в точках кривой касательные плоскости к поверхностям совпадают), то результат параллельного переноса касательного вектора вдоль этой кривой на обеих поверхностях совпадает.

Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ касаются вдоль кривой, которая геодезическая на первой поверхности, то эта кривая геодезическая и на второй поверхности.

Задача 3. Доказать, что если две поверхности в $\mathbb{E}^3$ пересекаются по кривой, являющейся геодезической на обеих поверхностях, причём касательные плоскости к поверхностям в любой точке кривой не совпадают (в такой ситуации говорят, что поверхности пересекаются трансверсально), то эта кривая является прямой.

Задача 4. Найти оператор переноса на прямом круговом цилиндре в $\mathbb{R}^3$. Как он зависит от кривой?

На какой угол повернётся касательный вектор к двумерной сфере после параллельного переноса вдоль параллели $\psi = \psi_0$ на угол α ?

Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.

Задача 5. Для поверхности вращения найти результат параллельного переноса вдоль параллелей и меридианов.

Указание: чтобы сформулировать ответ, выберите разумный базис в векторных полях.

Задача 6. Доказать, что если прямая лежит на поверхности, то она будет геодезической на этой поверхности.

Доказать, что геодезическими на k -плоскости $\mathbb{E}^k$ в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются в точности прямые.

Задача 7. Найти геодезические на сфере, цилиндре, круговом конусе (все три поверхности в $\mathbb{E}^3$).

Задача 8. Доказать, что меридианы поверхности вращения — геодезические. При каком условии параллель будет геодезической?

Задача 9. Описать геодезические на поверхности вращения, получив соотношение между r и α , где r расстояние от точки до оси вращения, а α угол между меридианом и вектором скорости геодезической в этой точке (утверждение, что это соотношение верно, обычно называется теоремой Клеро).

Задача 10. Найти на круговом конусе самопересекающиеся геодезические. *Указание: рассмотрите развёртку конуса. Не забудьте, что геодезическая может иметь несколько самопересечений.*