

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия. Листок 5.
Группы и алгебры Ли. 26.03.2025.

Задача 1. Доказать, что группы $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ и $SU(n)$ являются группами Ли. *Указание: можно рассмотреть стабилизаторы подходящего действия.*

Задача 2. Доказать, что коммутатор двух левоинвариантных (правоинвариантных) векторных полей тоже является левоинвариантным (правоинвариантным).

Доказать, что оба определения коммутатора в алгебре Ли \mathfrak{g} эквивалентны. Доказать, что если в определении использовать правоинвариантные векторные поля, то мы получим коммутатор, умноженный на -1 .

Задача 3. Доказать, что

- алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ является пространством всех вещественных $n \times n$ -матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;
- алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ является пространством всех вещественных кососимметрических $n \times n$ -матриц со стандартным матричным коммутатором, причём $\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$;
- алгебра Ли $\mathfrak{u}(n)$ является пространством всех комплексных косоэрмитовых $n \times n$ -матриц со стандартным матричным коммутатором;
- алгебра Ли $\mathfrak{su}(n)$ является пространством всех комплексных косоэрмитовых $n \times n$ -матриц с нулевым следом со стандартным матричным коммутатором;

Задача 4. Доказать, что $\text{ad } \xi(\eta) = [\xi, \eta]$.

Задача 5. Доказать, что группа Ли всегда ориентируема.

Доказать, что прямое произведение групп Ли является группой Ли. Как найти соответствующую алгебру Ли?

Задача 6. Пусть G — связная группа Ли, \mathfrak{g} — её алгебра Ли. Доказать, что если коммутатор любых элементов \mathfrak{g} равен нулю, то G абелева (поэтому алгебры Ли с нулевым коммутатором называются абелевыми).

Задача 7. Построить естественные гомоморфизмы групп Ли

а) $SU(2) \rightarrow SO(3)$, б) $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$.

Задача 8. Доказать, что

- компонента связности единицы G^0 группы Ли G является нормальной подгруппой Ли группы G ,
- компоненты связности группы Ли G являются смежными классами по G^0 ,
- факторгруппа G/G^0 дискретна.

Задача 9. Пусть группа Ли G транзитивно действует на связном многообразии M . Доказать, что

- компонента связности единицы G^0 тоже транзитивно действует на M ,
- $G/G^0 \cong G_x/(G_x \cap G^0)$ для любой точки $x \in X$,
- если существует такая точка $x \in X$, что стабилизатор G_x связан, то группа Ли G тоже связна.

Задача 10. Найти число компонент связности для $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$.