Листок 7, 27 октября 2025 г.

Задача 1. Докажите, что если $k \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ – башня полей, то $\operatorname{degtr} \mathbb{L}/k = \operatorname{degtr} \mathbb{L}/\mathbb{K} + \operatorname{degtr} \mathbb{K}/k$.

Задача 2. Докажите, что факториальное кольцо целозамкнуто.

Задача 3. Пусть $A \subset B$ – целое расширение колец. Докажите, что если $x \in A$ обратим в B, то x обратим в A.

Задача 4. Докажите, что если $B_1, \ldots, B_n$ целы над A, то $\Pi_{i=1}^n B_i$ цело над A.

Задача 5. Найдите целое замыкание кольца $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2}); \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Задача 6. Существует ли подполе в $\mathbb{C}$ изоморфное $\mathbb{R}$, но отличное от $\mathbb{R}$?

Задача 7. Пусть $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ подгруппа, порожденная матрицами

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где ϵ – первообразный корень из единицы степени n (она называется бинарной группой диэдра). Вычислите кольцо инвариантов $\mathbb{C}[x, y]^G$.

Задача 8. Докажите, что элементарные симметрические многочлены порождают $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ над $\mathbb{Z}$.

Задача 9. Докажите, что симметрические многочлены Ньютона

$$t_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$$

алгебраически независимы и порождают $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ над $\mathbb{K}$, если $\operatorname{char} \mathbb{K} > n$, но не порождают $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ над $\mathbb{Z}$.

Задача 10. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется кососимметрическим, если $f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma f(x_1, \ldots, x_n)$ для всех $\sigma \in S_n$. Покажите, что кососимметрические многочлены образуют модуль над $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$. Докажите, что это свободный модуль ранга 1.

Задача 11. Пусть $\delta(x_1, \ldots, x_n) = \Pi_{i<j}(x_i - x_j)$. Пусть $f(x) = a_n(x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$.

1. Докажите, что $R(f, f')$ делится на $\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
2. Частное $R(f, f')/\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является кососимметрическим многочленом от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
3. Докажите, что $R(f, f')$ делится на $\delta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2$.
4. Вычислите $R(f, f')$.