

Листок 3

Задача 3.1. Сколько существует различных топологий на множествах из 1, 2, 3 элементов?

Задача 3.2. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется открытым, если $f(U)$ открыто в Y для любого открытого $U \subseteq X$. Докажите, что непрерывное отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ строго монотонно тогда и только тогда, когда оно открыто.

Задача 3.3. Докажите или опровергните: в любом метрическом пространстве X замыкание открытого шара $B_\varepsilon(x)$ есть замкнутый шар $\{y \in X : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Задача 3.4. а) Докажите, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right).$$

Указание: Представьте его в виде сходящегося ряда.

б) Найдите предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{3n} \right).$$

Задача 3.5. Точка x называется точкой разрыва функции f , если предел $\lim_{y \rightarrow x} f(y)$ не существует или отличается от $f(x)$. Докажите, что монотонная функция $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ имеет не более чем счетное число точек разрыва.

Задача 3.6. При каких $\alpha > 0$ непрерывна функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^\alpha}, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \quad ?$$

При каких $\alpha > 0$ она дифференцируема?

Задача 3.7. Докажите, что подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

Задача 3.8. Пусть $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ — пространство всех абсолютно сходящихся рядов, то есть последовательностей $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ таких, что $\sum_i |x_i| < \infty$. Введём на нём метрику

$$\rho(x, y) = \sum_i |x_i - y_i|.$$

Компактен ли замкнутый единичный шар с центром в нуле в таком метрическом пространстве?

Задача 3.9. Пусть

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{если } x \text{ — рациональное число со знаменателем } q \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально} \end{cases}$$

и $D(x) = 1_{x \in \mathbb{Q}}$ — функции Римана и Дирихле. В каких точках непрерывна $R(x)$, а в каких $D(x)$?

Задача 3.10. Существует ли последовательность $f_n(x)$ непрерывных функций на $[0, 1]$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = R(x)$$

для всех $x \in [0, 1]$?