

Независимый Университет, осень 2025

Г.Б. Шабат,

## Двойственность Понтрягина

Лекция 2 (25 сентября 2025) – план

Отступление: другие двойственности

$\mathbb{k} \in \mathcal{FLD}$

О категории  $\mathbb{k}\text{-}\mathcal{VECT}_{\text{fin.dim}} \ni V, W, \dots$  Очевидно

$$\mathbb{k}\text{-}\mathcal{VECT}_{\text{fin.dim}} \cong_{\text{dim}} \mathbb{N}.$$

Операциям в  $\mathbb{N}$  соответствуют  $\oplus, \otimes$ . С прямой суммой всё ясно, о тензорном произведении поговорим.

Отступление о  $\mathbb{F}_{\text{un}}$ . Одна из идей

$$\mathbb{F}_{\text{un}}\text{-}\mathcal{VECT} \approx \mathcal{SET}.$$

Обозначение М.М. Постникова.

$$V \pitchfork W := \text{Mor}_{\mathbb{k}\text{-}\mathcal{VECT}}(V, W).$$

Тензорное произведение нестандартно.

$$\boxed{V \otimes W := V^* \pitchfork W} \cong W^* \pitchfork V.$$

Использовано  $X \pitchfork Y \cong Y^* \pitchfork X^*$ ,

где для  $\alpha : X \rightarrow Y$

$$\alpha^* : Y^* \rightarrow X^* : \lambda \mapsto \lambda(\alpha(x)).$$

Обобщённые следы. Для тензорной алгебры ещё нужно

$$(V \otimes W)^* = ?$$

Вычисляем

$$(V \otimes W)^* = \dots$$

Канонический изоморфизм

$$\boxed{(V \otimes W)^* = V^* \otimes W^*}$$

вытекает из наличия невырожденного спаривания

$$(X \pitchfork Y) \times (Y \pitchfork X) \longrightarrow \mathbb{k}.$$

Это спаривание имеет вид

$$(\alpha, \beta) \mapsto \boxed{\text{tr}(\alpha \circ \beta) = \text{tr}(\beta \circ \alpha)}.$$

Отмеченная "коммутативность", как и невырожденность спаривания, требуют доказательств, см. задачу **2.3**.

Некоторые обсуждённые параллели можно сопоставить с идеями работы [Girard1987], на которую мне любезно указал Л.Д. Беклемишев.

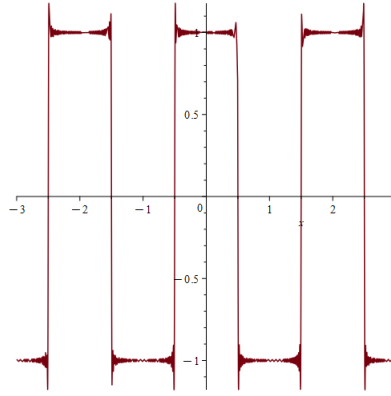
Таблица аналогий.

| $\mathbb{k}\text{-}\mathcal{VECT}_{\text{fin.dim}}$ | $\mathcal{L}\mathcal{C}\mathcal{A}\mathcal{B}$ | Высказывания                                                                                         |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $V \mapsto \mapsto V^*$                             | $G \mapsto \mapsto \widehat{G}$                | $\mathcal{A} \mapsto \overline{\mathcal{A}}$                                                         |
| $V^{**} \cong V$                                    | $\widehat{\widehat{G}} \cong G$                | $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$                                                    |
| $V \pitchfork W$                                    | $?$                                            | $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$                                                                   |
| $V \pitchfork W \cong W^* \pitchfork V^*$           | $(?)$                                          | $(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \equiv (\overline{\mathcal{B}} \implies \overline{\mathcal{A}})$ |
| $V \otimes W$                                       | $?$                                            | $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$                                                                       |
| $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$             | $(?)$                                          | $\overline{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} = \overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{B}}$     |

\*\*\*

От пар двойственных по Понтрягину групп к функциям на них.  
**Первые примеры.** Пользуемся интуицией разложения по ортонормированному базису в евклидовых пространствах.

В ряды Фурье с коэффициентами, задаваемые простыми формулами, разлагаются и разрывные функции, например, простейшая ”полупостоянная.”



Первым разложениям периодических функций в ряды Фурье посвящены задачи 4.4 и 4.5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Girard1987] Gean-Yves Girard, *Linear Logic*. Theoretical Computer Science 50 (1987), 1-102.