

НМУ, 2 курс, дифференциальная геометрия.
Экзамен. 19.06.2025.

Экзамен будет домашним. Решения (не забудьте написать свою фамилию!) надо прислать лектору по электронной почте не позднее понедельника 23 июня. Большая просьба по возможности для перевода рукописных работ в файл использовать сканер, а не фотографировать на телефон, присылать один файл в формате pdf, а не кучу файлов в формате jpg, и писать ручкой, а не карандашом.

Пересчет баллов в оценки НМУ следующий: 50 баллов достаточно для «отлично», 40 для «хорошо», 30 для «удовлетворительно». Для того, чтобы экзамен был засчитан в НМУ, необходимо получить зачёт. Для получения зачёта надо решить в каждом из листков с задачами не менее трёх задач, но возможны ослабления этого критерия в зависимости от общей ситуации со сдачей задач.

Пересчет баллов в оценки ВШЭ следующий: $\min\left(10, \left\lceil \frac{\text{сумма баллов}}{5} \right\rceil\right)$. Зачёт для ВШЭ не нужен.

Задача 1. Доказать, что на двумерной поверхности в евклидовом пространстве с гауссовой кривизной K тензор Римана можно найти по формуле $R(X, Y)Z = K((Y, Z)X - (X, Z)Y)$. (10 баллов).

Задача 2. Рассмотрим на многообразии M две римановых метрики: g со связностью Леви-Чивиты ∇ и $\tilde{g} = \lambda g$, где гладкая функция $\lambda > 0$, со связностью Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$. Найти разность $\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. (10 баллов).

Задача 3. Пусть M_1 и M_2 римановы многообразия. На прямом произведении $M = M_1 \times M_2$ естественным образом вводится структура риманова многообразия, так как на касательном расслоении $TM = TM_1 \oplus TM_2$ естественно вводится евклидова метрика. Пусть $p_i : M = M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$, $i = 1, 2$, естественные проекции. Чтобы упростить дальнейшие формулы, введём обозначение $X_i = dp_i(X) \in \Gamma(TM_i)$, где $X \in \Gamma(TM)$ векторное поле на M . Пусть R тензор Римана риманова многообразия M , а R^i тензор Римана римановых многообразий M_i , $i = 1, 2$. Доказать, что $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R^1(X_1, Y_1)Z_1, W_1 \rangle + \langle R^2(X_2, Y_2)Z_2, W_2 \rangle$. (5 баллов).

Задача 4. Пусть в условиях предыдущей задачи $\sigma \subset T_p M$, $p \in M$, такая 2-плоскость, что $\dim dp_i(\sigma) = 1$, $i = 1, 2$, то есть плоскость σ «натянута на вектор, касательный к M_1 , и на вектор, касательный к M_2 ». Доказать, что тогда секционная кривизна K_σ в точке p в направлении σ равна нулю. (5 баллов).

Задача 5. Докажите, что на многообразии отрицательной секционной кривизны геодезические не содержат сопряжённых точек (10 баллов).

Задача 6. Найдите явно якобиевы поля вдоль геодезических на сфере S^2 в подходящем базисе векторных полей. (10 баллов).

Задача 7. Доказать, что над S^1 есть с точностью до изоморфизма только два вещественных векторных расслоения ранга 1, тривиальное и лист Мёбиуса. Так как $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$, то универсальное расслоение γ^1 над $\mathbb{RP}^1$ можно рассматривать как расслоение над S^1 . Оно изоморфно тривиальному или листу Мёбиуса? (10 баллов).

Задача 8. Найдите $\text{ch}(\xi_k)$, где ξ_k тривиальное расслоение ранга k (5 баллов).

Задача 9. Докажите, что если многообразие M является границей некоторого многообразия W , то все числа Понтрягина M , то есть числа Потрягина касательного расслоения TM , равны нулю. (10 баллов).

Задача 10*. Найти число Понтрягина

$$\langle p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1), [S^4] \rangle = \oint_{S^4} p_1(r\gamma_{\mathbb{H}}^1),$$

где $\gamma_{\mathbb{H}}^1 = (E \rightarrow \mathbb{H}P^1 \simeq S^4)$ — универсальное расслоение над кватернионной проективной прямой, а r операция оветствления (не забывайте о некоммутативности кватернионов!) (25 баллов).