Листок 5, 10 марта 2025 г.

Задача 1. Опишите (ко-)произведения в категории множеств, (абелевых) групп, колец, A-модулей.

Задача 2. Дайте категорное определение (расслоенного) (ко-)произведения произвольного семейства объектов. Покажите, что в категории абелевых групп бесконечные произведения и копроизведения неизоморфны. Что такое сумма и произведение пустого семейства объектов категории?

Задача 3. Объясните, как построить категорию по любому частично упорядоченному множеству.

Задача 4. Докажите, что функторы между двумя категориями образуют категорию.

Задача 5. Докажите, что абелизация группы (то есть взятие фактора по ее коммутанту) является функтором $\mathcal{GRP} \to \mathcal{AB}$.

Задача 6. Пусть $\mathcal{C}$ – локально малая категория. Для фиксированного $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ и любого $Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ положим $F_X(Y) = \mathrm{Hom}(X, Y)$.

1. Докажите, что F – ковариантный функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{SETS}$.
2. Определите его контравариантный аналог.
3. Функтор G из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{SETS}$ называется *представимым*, если он изоморфен F_X для некоторого X. Приведите пример функтора, не являещегося представимым.
4. * Докажите лемму Йонеды: естественные преобразования из F_X в G биективны $G(X)$ (и эта биекция естественна по G и X).

Задача 7. Будем говорить, что функторы $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *сопряжены*, если для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ выполнено

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y),$$

и эта биекция естественна по X и Y. В этом случае говорят, что F – левый сопряженный к G, а G – правый сопряженный к G.

1. Постройте левый сопряженный к забывающему функтору $\mathcal{GRP} \to \mathcal{SETS}$. Существует ли правый сопряженный?
2. Постройте левый сопряженный к забывающему функтору $\mathcal{GRP} \to \mathcal{MON}$ (категория моноидов). Он называется *группой Гротендика* моноида.
3. Какому функтору сопряжена абелизация из задачи 4?
4. Какому функтору сопряжено взятие поля частных на категории областей целостности?

Задача 8. Пусть $\mathbf{1}$ — категория, состоящая из единственного объекта и единственного (тождественного) морфизма. Когда единственный функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{1}$ имеет левый сопряженный? Когда он имеет правый сопряженный?

Задача 9. Докажите, что функтор является эквивалентностью категорий тогда и только тогда, когда он строго полон и сюръективен на множестве классов изоморфизма объектов.