

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ, ПОЛЕ ЧАСТНЫХ.

Задача 1. Найдите явное выражение для коэффициентов степенных рядов:

а) $\frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}$; б) $\frac{1}{1 + x + x^2}$.

Задача 2. Найдите первообразную и 2025-ю производную от $\frac{1 + 2x}{1 - 3x - 4x^2}$.

Задача 3. Найдите явное выражения для k -ого члена последовательности заданной рекуррентно.

а) $a_0 = -5, a_1 = 4, a_2 = 88$ и $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$; б) $a_0 = 4, a_1 = 12$ и $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n$.

Задача 4. Найдите производящую функцию последовательности $1^2, 2^2, 3^2, \dots$

Задача 5. Число Каталана C_n — число способов расставить n пар скобок в выражении $a_0 a_1 \dots a_n$. В частности, $c_0 = 1$ (соглашение), $c_1 = 1, c_2 = 2, c_3 = 5$.

а) Докажите, что $c_n = c_0 c_{n-1} + \dots + c_{n-1} c_0$.

б) Пусть $c(x) = \sum_{k \geq 0} c_k x^k$. Докажите, что $c(x)^2 = \frac{c(x)-1}{x}$ и найдите явную формулу для чисел Каталана.

в) В выпуклом n -угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они нигде не пересекались, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 6. а) Пусть $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \in \mathbb{Q}[[x]]$. Докажите, что $e^x \notin \mathbb{Q}(x)$.

б) Предъявите такой ряд $f(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$ с коэффициентами из нулей и единиц, что $f(x) \notin \mathbb{Q}(x)$.

Задача 7. Опишите поле частных кольца

а) $\mathbb{Z}[x]$; б) $\mathbb{Q}[[x]]$; в) Докажите, что поле частных $\mathbb{Z}[[x]]$ является подполем в поле $\mathbb{Q}((x))$, но не совпадает с ним;

г*) Докажите, что поле частных кольца $\mathbb{K}[[x, y]]$ является подполем в поле $\mathbb{K}((x))((y))$, но не совпадает с ним.

Задача 8. Пусть $N(d)$ — число неприводимых многочленов степени d в $\mathbb{F}_p[x]$ со старшим коэффициентом 1. а) Докажите, что

$$\frac{1}{1 - pt} = \prod_{d \geq 1} \left(\frac{1}{1 - t^d} \right)^{N(d)}.$$

и выведите из этого равенство $p^n = \sum_{d|n} dN(d)$. б) Пользуясь задачей 7 из Листка 1, найдите явную формулу для $N(d)$ и докажите, что $N(d) > 0$ для любого $d > 0$. Это даёт альтернативное доказательство существования конечного поля порядка p^d .

Задача 9*. Последовательность де Бройна с параметрами $(n + 1, m)$ — это последовательность длины $(n + 1)^m$ из символов $0, 1, \dots, n$, которая содержит в качестве подпоследовательности любую последовательность¹ длины m при записи по кругу. Например, последовательность 221201100 является такой последовательностью для $m = n = 2$. Цель задачи — построить последовательность де Бройна для $n + 1 = p$ (в частности, $p = 2$).

Пусть $s_0 = 1, s_{-1} = \dots s_{-(p-1)} = 0$. Будем строить (бесконечную) последовательность по правилу

$$s_i = a_1 s_{i-1} + \dots + a_n s_{i-n} \pmod{p},$$

где $a_i \in \{0, \dots, p - 1\}$. Пусть $S(x) = \sum_{k \geq 0} s_k x^k$ — производящая функция.

а) Докажите, что первая повторяющаяся последовательность длины n это $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$.

б) Пусть $P(x) = 1 - a_1 x - \dots - a_n x^n \in \mathbb{F}_p[x]$. Докажите, что

$$\frac{1}{P(x)} = S(x)$$

в $\mathbb{F}_p[[x]]$.

в) Докажите, что $P(x)$ делит $1 - x^k$ тогда и только тогда, когда k — кратное периода последовательности.

г) Пусть $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ — неприводимый многочлен степени n со свободным членом равным единице, среди корней которого есть первообразный корень в $\mathbb{F}_{p^n}$ (сродни задаче 5 листка 2). Докажите, что период последовательности равен $p^n - 1$. Объясните как из полученной последовательности получить последовательность де Бройна. Сколько различных последовательностей де Бройна можно получить этим способом?

д) Докажите, что $P(x) = 1 + x + x^4 \in \mathbb{F}_2[x]$ подходит под условия предыдущего пункта и постройте соответствующую последовательность де Бройна.

¹... из тех же символов