
Программа курса "Комплексная геометрия"

Никита Клемятин

Цель курса – рассказать ряд базовых результатов и техник в комплексной геометрии, дойдя до тех, что не содержатся в книжках Гриффитса-Харриса и/или Хойхбрехтса. Среди них L^2 -оценка Хёрмандера (и теорема Кодаиры как следствие из нее), а также теорема Калаби-Яу (и геометрические следствия из нее). Также хотелось бы обсудить саму кэлерову геометрию, т.е. как кривизна влияет на свойства многообразия, как устроены многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны, etc.

Прerequisites курса:

Уверенное владение материалом первых двух курсов НМУ. Также не помешают знания из курсов римановой геометрии, УрЧП и функционального анализа.

Программа курса:

1. (Почти) комплексные многообразия. Голоморфные и плюрисубгармонические функции, а также сопутствующая линейная алгебра. Примеры.
2. Подмногообразия и дивизоры.
3. Голоморфные расслоения и когерентные пучки. Когомологии.
4. Эрмитовы метрики и связность Черна. Кривизна. Подрасслоения, вторая фундаментальная форма и уравнение Гаусса.
5. Кэлеровы метрики, связность Леви-Чивита, секционные кривизны и кривизна Риччи. Кэлеровы тождества. Теорема Ходжа и достаточно детальный набросок доказательства.

Тут, наверное, нужен комментарий. Обычно теорему Ходжа либо вообще не доказывают, либо пересказывают все ее доказательство (например по книжке Уорнера). Я бы хотел избрать другой путь: я не хочу не доказывать самые трудные аналитические факты типа леммы Реллиха или неравенства $\|u\|_{s+2} \leq C_s(\|\Delta u\|_s + \|u\|_s)$, но

хочу показать, как они работают и зачем они вообще нужны. Так люди поймут, как работает теория УрЧП в доказательстве, но при этом не будет потрачено много времени.

6. Возвращение к кривизнам: положительная/отрицательная кривизна. Лемма Шварца и формулы Кодаиры-Бохнера. Следствия из них.
7. L^2 -оценка Хёрмандера. Мультипликаторные пучки идеалов, теорема Надея. Теорема Кодаиры как следствие из них.
8. (опционально) Доказательство теоремы Ньюлендера-Ниренберга об интегрируемости почти комплексных структур, используя L^2 -оценку Хёрмандера.

Тут тоже требуется пояснение. Дело в том, что доказательство L^2 -оценки использует только тот факт, что тензор Нийенхейса равен нулю, т.е. имеет место разложение $d = \partial + \bar{\partial}$ дифференциала де Рама на k -формах. Пользуясь этим, можно легко доказать существование голоморфных координат в окрестности каждой точки.

9. Уравнение Монжа-Ампера и теорема Калаби-Яу. Существование метрик Кэлера-Эйнштейна на многообразиях общего типа и на многообразиях с нулевым классом Черна.
10. Если останется время: можно рассказать теорему Демайи-Пауна о характеристике кэлера конуса через интегралы по подмногообразиям (там существенным образом используется теорема Калаби-Яу).

Теперь обсудим желаемый формат курса:

Формат курса:

1. Курс будет читаться дистанционно.
2. Семинара для приема задач не будет, вместо этого будет еще одна лекция. Всего будет две лекции в неделю.

Причины: без двух лекций в неделю нельзя надеяться изложить вышеуказанный материал. Кроме того, я не уверен в своей способности обслужить большое количество студентов, равно как и в возможности найти людей, уверенно владеющих материалом второй

половины курса. Опять же, прием задач в НМУ зачастую превращается в некритичный пересказ материалов из книжек, особенно на сложных курсах. Хотелось бы этого избежать.

3. Домашние задания будут письменными, присылаться мне на почту. Листки будут выдаваться раз в две недели, будут содержать около десяти не очень простых задач.

4. Оценка за курс ставится по результатам решения домашних работ.

У курса может быть продолжение.