

Листок 10*

Напоминание: банахов предел φ — это линейный функционал ℓ^∞ такой, что $\varphi((1, 1, \dots)) = 1$, $\varphi(x) \geq 0$ при $x \geq 0$ и $\varphi(Tx) = \varphi(x)$, где T — оператор левого сдвига.

Задача 10.1 (Теорема Сачестона).

Пусть $x \in \ell^\infty$ — ограниченная вещественная последовательность. Докажите, что множество значений всех банаховых пределов на x совпадает с интервалом $[q(x), p(x)]$, где

$$p(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_j \frac{x_j + \dots + x_{n+j-1}}{n} \right) \text{ и } q(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\inf_j \frac{x_j + \dots + x_{n+j-1}}{n} \right)$$

(нужно ещё доказать, что эти пределы существуют)

Задача 10.2. Докажите, что замкнутый единичный шар в c_0 не является слабо компактным.

Задача 10.3 (Лемма Риса).

- а) Пусть $Y \subset X$ — собственное замкнутое подпространство в нормированном пространстве, $0 < \varepsilon < 1$. Докажите, что существует $x \in X$ такой, что $\|x\| = 1$ и $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ для всех $y \in Y$.
- б) Докажите, что замкнутый единичный шар в бесконечномерном банаховом пространстве не является компактным относительно сильной топологии.

Задача 10.4. Пусть $S \subset C([0, 1])$ — подпространство в непрерывных функциях, замкнутое как подпространство $L^2([0, 1])$.

- а) Докажите, что нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_\infty$ эквивалентны на S .
- б) Докажите, что слабая и сильная сходимости на S совпадают.
- в) Заключите, что S конечномерно.

Задача 10.5. Пусть K — компактное хаусдорфово топологическое пространство, а \mathcal{U} — ультрафильтр на натуральных числах. Докажите, что для любой последовательности x_n точек K существует и единственен ультрапредел

$$x = \lim_{\mathcal{U}} x_n,$$

то есть такое x , что для любого открытого $V \subset K$, содержащего x , выполнено $\{n : x_n \in V\} \in \mathcal{U}$.

Задача 10.6 (Компактификация Стоуна-Чеха). Рассмотрим множество $\beta\mathbb{N}$ всех ультрафильтров на \mathbb{N} . Породим топологию множествами $\hat{A} = \{\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N} : A \in \mathcal{U}\}$.

- а) Докажите, что пространство $\beta\mathbb{N}$ компактно.
- б) Пусть $\iota : \mathbb{N} \rightarrow \beta\mathbb{N}$ — вложение, сопоставляющее n главный ультрафильтр, состоящий из множеств, содержащих n . Докажите, что для любого $f : \mathbb{N} \rightarrow K$, где K — хаусдорфов компакт, существует и единственно непрерывное отображение βf такое, что $\beta f \circ \iota = f$.
- в) Докажите, что $\beta\mathbb{N}$ экстремально несвязно (замыкание любого открытого множества открыто) и опишите алгебру $C(\beta\mathbb{N})$ непрерывных функций на $\beta\mathbb{N}$.

Задача 10.7 (Теорема Гельфанда-Мазура).

Напомним, что A — банахова алгебра, если A — банахово пространство и норма удовлетворяет неравенству $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

- а) Пусть A — унитарная банахова алгебра над \mathbb{C} , то есть A обладает единицей. Пусть $a \in A$ таково, что $a - \lambda 1$ обратимо для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Докажите, что функция

$$\lambda \rightarrow \left\| \frac{1}{a - \lambda 1} \right\|$$

непрерывна и достигает максимума. Пусть D — множество тех λ , где этот максимум достигается. Докажите, что D замкнуто.

- б) Пусть $0 \in D$. Рассмотрим натуральное n и ζ — примитивный корень степени n из 1. Определим

$$S_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{a - r\zeta^m}.$$

Докажите, что для достаточно малых r выполнено $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(r) = \frac{1}{a}$ и заключите, что $r\zeta^m \in D$ для всех ζ и m .

- в) Докажите, что D замкнуто и открыто. Заключите, что для банахова алгебра над \mathbb{C} , являющаяся телом (все ненулевые элементы обратимы), изоморфна \mathbb{C} .

Задача 10.8 (Теорема Рамсея).

Пусть (V, E) — полный граф на счётном множестве вершин, рёбра которого покрашены в два цвета: красный и синий. Пусть \mathcal{U} — неглавный ультрафильтр на V .

- а) Для любого $v \in V$ обозначим через R_v множество таких $w \in V$, что ребро vw красное, а B_v — таких w , что vw — синее. Докажите, что R_v или B_v лежит в \mathcal{U} . В первом случае будем говорить, что v — \mathcal{U} -красная вершина, а во втором — что \mathcal{U} -синяя.
- б) Докажите, что либо множество \mathcal{U} -красных, либо множество \mathcal{U} -синих вершин лежит в \mathcal{U} .
- в) Заключите, что граф (V, E) содержит бесконечный одноцветный полный граф.