Степенные ряды, поле частных.

Задача 1. Найдите явное выражение для коэффициентов степенных рядов:
а) $\dfrac{1}{x^3-x^2-x+1}$; **б)** $\dfrac{1}{1+x+x^2}$.

Задача 2. Найдите первообразную и 2025-ю производную от $\dfrac{1+2x}{1-3x-4x^2}$.

Задача 3. Найдите явное выражения для k-ого члена последовательности заданной рекуррентно.

а) $a_0=-5$, $a_1=4$, $a_2=88$ и $a_n=6a_{n-1}-12a_{n-2}+8a_{n-3}$; **б)** $a_0=4$, $a_1=12$ и $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+2^n$.

Задача 4. Найдите производящую функцию последовательности $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$.

Задача 5. *Число Каталана* C_n — число способов расставить n пар скобок в выражении $a_0a_1\ldots a_n$. В частности, $c_0=1$ (соглашение), $c_1=1$, $c_2=2$, $c_3=5$.
а) Докажите, что $c_n=c_0c_{n-1}+\ldots+c_{n-1}c_0$.
б) Пусть $c(x)=\sum_{k\geq 0}c_kx^k$. Докажите, что $c(x)^2=\frac{c(x)-1}{x}$ и найдите явную формулу для чисел Каталана.
в) В выпуклом n-угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они нигде не пересекались, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 6. а) Пусть $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\in\mathbb{Q}[[x]]$. Докажите, что $e^x\notin\mathbb{Q}(x)$.
б) Предъявите такой ряд $f(x)\in\mathbb{Z}[[x]]$ с коэффициентами из нулей и единиц, что $f(x)\notin\mathbb{Q}(x)$.

Задача 7. Опишите поле частных кольца
а) $\mathbb{Z}[x]$; **б)** $\mathbb{Q}[[x]]$; **в)** Докажите, что поле частных $\mathbb{Z}[[x]]$ является подполем в поле $\mathbb{Q}((x))$, но не совпадает с ним;
г*) Докажите, что поле частных кольца $\Bbbk[[x,y]]$ является подполем в поле $\Bbbk((x))((y))$, но не совпадает с ним.

Задача 8. Пусть $N(d)$ — число неприводимых многочленов степени d в $\mathbb{F}_p[x]$ со старшим коэффициентом 1. **а)** Докажите, что

$$\frac{1}{1-pt}=\prod_{d\geq 1}\left(\frac{1}{1-t^d}\right)^{N(d)}.$$

и выведите из этого равенство $p^n=\sum_{d|n}dN(d)$. **б)** Пользуясь задачей 7 из Листка 1, найдите явную формулу для $N(d)$ и докажите, что $N(d)>0$ для любого $d>0$. *Это даёт альтернативное доказательство существования конечного поля порядка p^d.*

Задача 9*. *Последовательность де Бройна* с параметрами $(n+1,m)$ — это последовательность длины $(n+1)^m$ из символов $0,1,\ldots,n$, которая содержит в качестве подпоследовательности любую последовательность[1] длины m при записи по кругу. Например, последовательность 221201100 является такой последовательностью для $m=n=2$. Цель задачи — построить последовательность де Бройна для $n+1=p$ (в частности, $p=2$).
Пусть $s_0=1$, $s_{-1}=\ldots s_{-(p-1)}=0$. Будем строить (бесконечную) последовательность по правилу

$$s_i=a_1s_{i-1}+\ldots+a_ns_{i-n} \mod p,$$

где $a_i=0,\ldots,p-1$. Пусть $S(x)=\sum_{k\geq 0}s_kx^k$ – производящая функция.
а) Докажите, что первая повторяющаяся последовательность это $s_0s_1\ldots s_{n-1}$.
б) Пусть $P(x)=1-a_1x-\ldots-a_nx^n\in\mathbb{F}_p[x]$. Докажите, что

$$\frac{1}{P(x)}=S(x)$$

в $\mathbb{F}_p[[x]]$.
в) Докажите, что $P(x)$ делит $1-x^k$ тогда и только тогда, когда k — кратное периода последовательности.
г) Пусть $P(x)\in\mathbb{F}_p[x]$ — неприводимый многочлен степени n со свободным членом равным единице, среди корней которого есть первообразный корень в $\mathbb{F}_{p^n}$ (*сродни задаче 5 листка 2*). Докажите, что период последовательности равен p^n-1. Объясните как из полученной последовательности получить последовательность де Бройна. Сколько различных последовательностей де Бройна можно получить этим способом?
д) Докажите, что $P(x)=1+x+x^4\in\mathbb{F}_2[x]$ подходит под условия предыдущего пункта и постройте соответствующую последовательность де Бройна.

---

[1] …из тех же символов