

ВШЭ, риманова геометрия

Экзамен для всех кроме 4 курса бакалавриата и 2 курса магистратуры
Решения прислать отсканированными в один pdf-файл не позднее 25.06.2025

Пересчет баллов в оценки за экзамен следующий: $\min\left(10, \left\lceil \frac{\text{сумма баллов}}{10} \right\rceil\right)$. Формула оценки за курс следующая: $0,4 * \text{контрольная} + 0,5 * \text{экзамен} + 0,1 * \text{работа на семинарах}$.

Задача 1. Доказать, что на двумерной поверхности в евклидовом пространстве с гауссовой кривизной K тензор Римана можно найти по формуле $R(X, Y)Z = K((Y, Z)X - (X, Z)Y)$. (10 баллов).

Задача 2. Рассмотрим на многообразии M две римановых метрики: g со связностью Леви-Чивиты ∇ и $\tilde{g} = \lambda g$, где гладкая функция $\lambda > 0$, со связностью Леви-Чивиты $\tilde{\nabla}$. Найти разность $\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$. (10 баллов).

Задача 3. Докажите, что точки, сопряжённые к точке p вдоль геодезической $\gamma_{p,X}(t)$, являются изолированными. (10 баллов).

Задача 4. Пусть p точка риманова многообразия M , а $r(x) = d(p, x)$ — функция расстояния до точки p . Пусть $\gamma(t)$ геодезическая с единичным вектором скорости, выходящая из точки p , а $J(t)$ якобиево векторное поле на этой геодезической. Докажите, что вторая вариация геодезической при том, что

$$\frac{\partial \gamma}{\partial s_1} = \frac{\partial \gamma}{\partial s_2} = J,$$

равна $\text{Hess } r(J(\beta), J(\beta))$, при достаточно малых $\beta > 0$. (30 баллов).

Задача 5. Докажите, что любая пара точек на полном односвязном римановом многообразии неположительной секционной кривизны соединяется единственной геодезической, которая минимальна. (20 баллов).

Задача 6*. Доказать, что поверхность Эннепера

$$f(s, t) = \left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{6} + \frac{st^2}{2}, -\frac{t}{2} + \frac{t^3}{6} - \frac{s^2 t}{2}, \frac{s^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right)$$

является минимальной поверхностью в $\mathbb{R}^3$. (10 баллов).

Задача 7. Докажите формулу Бохнера: если u гладкая функция на римановом многообразии, то

$$\Delta \left(\frac{|\text{grad } u|^2}{2} \right) = \langle \text{grad } \Delta u, \text{grad } u \rangle + |\text{Hess } u|^2 + \text{Ric}(\text{grad } u, \text{grad } u).$$

(25 баллов).

Задача 8. Пусть (M, g) риманово многообразие, $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ сфера со стандартной метрикой и $\Phi = (u_1, \dots, u_{n+1}) : M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гладкое отображение. Доказать, что отображение Φ является гармоническим тогда и только тогда, когда выполнено уравнение $\Delta_g \Phi = |\nabla \Phi|_g^2 \Phi$. Здесь равенство понимается покомпонентно, то есть для любого i выполнено

$$\Delta_g u_i = |\nabla \Phi|_g^2 u_i, \text{ где } |\nabla \Phi|_g^2 = \sum_{i=1}^{n+1} |du_i|_g^2. \text{ (30 баллов).}$$

Задача 9. Пусть $u_1, \dots, u_{n+1}$ такие собственные функции оператора Лапласа-Бельтрами Δ_g на римановом многообразии (M, g) с одним и тем же собственным числом λ , что $\sum_{i=1}^{n+1} u_i^2 = 1$. Тогда отображение, определённое формулой $\Phi = (u_1, \dots, u_{n+1}) : M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, является гармоническим отображением в сферу радиуса 1, причём с постоянной плотностью энергии $e(\Phi) = \frac{1}{2} |\nabla \Phi|_g^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} |du_i|_g^2 = \frac{\lambda}{2}$. (15 баллов).

Задача 10. Пусть $\Phi = (u_1, \dots, u_{n+1}) : M \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гармоническое отображение риманова многообразия (M, g) в сферу радиуса 1 с постоянной плотностью энергии $e(\Phi)$. Тогда все функции u_i являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами Δ_g на (M, g) с одним и тем же собственным числом $\lambda = 2e(\Phi)$. (15 баллов).