

ВШЭ, риманова геометрия. Листок 5.
Тензор Римана. Подмногообразия. 6.03.2025.

Задача 1. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Пусть K гауссова кривизна M . Доказать, что в данном случае

- $\text{Ric}(X, Y) = K\langle X, Y \rangle$, или, в тензорной записи, $R_{ij} = Kg_{ij}$,
- скалярная кривизна равна удвоенной гауссовой, $R = 2K$.

Задача 2. Доказать, что из-за многочисленных симметрий тензор Римана на двумерном многообразии полностью определяется своей компонентой $R_{12,2}$. Доказать, что на двумерном многообразии верно тождество

$$R = \frac{2R_{12,21}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Задача 3. Рассмотрим двумерную поверхность M в $\mathbb{E}^3$ с индуцированной метрикой и связностью Леви-Чивита. Доказать, что секционная кривизна $K_{T_A M}$ равна гауссовой кривизне в точке A .

Задача 4. Доказать, что для n -мерной сферы $\mathbb{S}_r^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ радиуса r тензор Римана можно найти по формуле $R(X, Y)Z = \frac{1}{r^2}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y)$, а секционная кривизна не зависит ни от точки, ни от направления, и равна $K = \frac{1}{r^2}$.

Задача 5. Доказать, что для симметричной связности ∇ имеет место тождество Бианки $(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) = 0$, где X, Y, Z и V векторные поля. В компонентах это тождество имеет вид

$$\nabla_m R_{ij,k}^l + \nabla_i R_{jm,k}^l + \nabla_j R_{mi,k}^l = 0 \quad \text{или} \quad R_{ij,k;m}^l + R_{jm,k;i}^l + R_{mi,k;j}^l = 0.$$

Задача 6. Для связности в касательном расслоении доказать следующие тождества:

- первое структурное уравнение Картана $de^i = e^j \wedge \Gamma_j^i + T^i$,
- второе структурное уравнение Картана

$$d\Gamma_i^j = \Gamma_i^k \wedge \Gamma_k^j + F_i^j,$$

- первое тождество Бианки

$$dT^i = -T^j \wedge \Gamma_j^i + e^j \wedge F_j^i,$$

- второе тождество Бианки

$$dF_i^j = \Gamma_i^k \wedge F_k^j - F_i^k \wedge \Gamma_k^j,$$

где e^i дуальный базис к выбранному базису e_i в векторных полях, Γ_j^i локальная 1-форма связности,

$$F_i^j = R_{kl,i}^j e^k \otimes e^l = \sum_{k < l} R_{kl,i}^j e^k \wedge e^l$$

локальная 2-форма кривизны, а T^i локальные 2-формы кручения,

$$T^k = T_{ij}^k e^i \otimes e^j = \sum_{i < j} T_{ij}^k e^i \wedge e^j.$$