ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 5: ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ-1

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть γ^1 — тавтологическое расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$, ζ — конечномерное векторное расслоение над $\mathbb{R}P^\infty$. Докажите, что $\gamma^1 \oplus \zeta$ нетривиально.

2. Пусть γ — тавтологическое одномерное расслоение над $\mathbb{C}P^n$. Вычислите кольцо когомологий многообразия $\mathbb{C}P(\gamma^{\otimes i_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{\otimes i_k})$ и полный класс Чженя его касательного расслоения.

3. а) Пусть ξ — вещественное векторное расслоение, $w(\xi) \neq 1$. Докажите, что натуральное число $\min\{i : w_i(\xi) \neq 0\}$ есть степень двойки.
б) Пусть ξ — комплексное векторное расслоение, $c(\xi) \neq 1$. Докажите, что натуральное число $\min\{i : c_i(\xi) \neq 0\}$ может быть любым.

4. Пусть ξ — m-мерное, η — n-мерное комплексные расслоения. Выразите $c_2(\xi \otimes \eta)$, $c_1(S^2\xi)$, $c_2(S^2\xi)$, $c_1(\Lambda^2\xi)$, $c_2(\Lambda^2\xi)$ через классы Чженя расслоений ξ и η.

5. Докажите, что полные классы Чженя симметрической и внешней степени расслоения ξ выражаются по формулам

$$c(\Lambda^k\xi) = \prod_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant n} (1 + x_{i_1} + \dots + x_{i_k}), \quad c(S^k\xi) = \prod_{1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_k \leqslant n} (1 + x_{i_1} + \dots + x_{i_k}),$$

если выразить правые части через элементарные симметрические функции $\sigma_i(x_1, \dots, x_n)$ и подставить вместо них классы Чженя $c_i(\xi)$.

6. Приведите пример расслоения $F \to E \to B$, к которому применима теорема Лере–Хирша, но кольца $H^*(E; R)$ и $H^*(F; R) \otimes_R H^*(B; R)$ не изоморфны.

7. Докажите изоморфизмы колец когомологий

$$H^*(U(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_1, \dots, u_n], \quad H^*(SU(n); \mathbb{Z}) \cong \Lambda[u_2, \dots, u_n], \quad \dim u_i = 2i - 1.$$

(Указание: рассмотрите расслоение $U(n-1) \to U(n) \to S^{2n-1}$.)

8. а) Пусть $GL_n(\mathbb{C}) \to Fr(\xi) \to X$ — расслоение реперов, соответствующее n-мерному комплексному расслоению ξ над X. Пусть γ^n — универсальное расслоение над $BU(n)$. Докажите, что $\pi_i(Fr(\gamma^n)) = 0$ для всех $i \geq 0$.
б) Докажите, что все комплексные расслоения над S^3 тривиальны
(Указание: используйте, что $GL_n(\mathbb{C}) \simeq U(n)$ и $U(2) \cong S^1 \times S^3$.)

9. а) Докажите, что числа Бетти $\beta_k(Fl(\mathbb{C}^n)) := \operatorname{rank} H_k(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z})$ комплексного многообразия флагов удовлетворяют тождеству

$$\sum_{k \geq 0} \beta_k(Fl(\mathbb{C}^n)) \cdot t^k = \prod_{i=1}^{n-1} (1 + t^2 + \dots + t^{2i}) \in \mathbb{Z}[t].$$

б) Докажите, что кольцо когомологий многообразия флагов имеет вид

$$H^*(Fl(\mathbb{C}^n); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \deg x_i = 2.$$

10. Докажите, что $Fl(\gamma^n) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^n$, причём гомотопическая эквивалентность отождествляет проекцию $Fl(\gamma^n) \to BU(n)$ с отображением $f : (\mathbb{C}P^\infty)^n \to BU(n)$, классифицирующим расслоение $\gamma^1 \times \dots \times \gamma^1$.