ТОПОЛОГИЯ–1

ЛИСТОЧЕК 4: СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Докажите, что

а) аксиома T_1 равносильна замкнутости одноточечных подмножеств;

б) аксиома T_1 равносильна тому, что для любой точки x пересечение всех её открытых окрестностей равно $\{x\}$;

в) аксиома T_2 равносильна тому, что для любой точки x пересечение замыканий всех её открытых окрестностей равно $\{x\}$;

г) аксиома T_2 равносильна замкнутости диагонали $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ в произведении $X \times X$;

д) аксиома T_3 равносильна тому, что для любой точки x и её окрестности $U \ni x$ существует такая её окрестность $V \ni x$, что $\overline{V} \subset U$;

е) аксиома T_4 равносильна тому, что для любого замкнутого подмножества F и его окрестности $U \supset F$ существует такая его окрестность $V \supset F$, что $\overline{V} \subset U$.

2. Докажите, что пространство Y хаусдорфово тогда и только тогда, когда для любого пространства X и двух непрерывных отображений $f, g\colon X \to Y$ подмножество $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ замкнуто в X. Выведите, что тогда, если два непрерывных отображения равны на всюду плотном подмножестве в X, то они равны всюду.

3. Приведите пример пространства, удовлетворяющего аксиоме T_2, но не удовлетворяющего аксиоме T_3.

4. Докажите, что если пространство со счётной базой удовлетворяет аксиоме T_3, то оно удовлетворяет аксиоме T_4.

5. Докажите, что любое метризуемое пространство X удовлетворяет аксиомам отделимости T_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

6. Приведите пример топологического пространства, удовлетворяющего аксиоме T_1, в котором существует компактное незамкнутое подмножество.

7. Верно ли, что если пространство X удовлетворяет какой-то аксиоме отделимости T_i, то и его образ при непрерывном отображении также удовлетворяет этой аксиоме отделимости?

8. Проверьте, что для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств A и B в метрическом пространстве, если одно из них компактно, существует такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестности A и B не пересекаются. Верно ли это для некомпактных замкнутых подмножеств?

9. **а)** Докажите, что если для любых двух точек x, y пространства X существует связное подпространство $A \subset X$, содержащее их, то и всё пространство X связно.

б) Докажите, что если два связных подпространства $A, B \subset X$ имеют непустое пересечение, то их объединение $A \cup B$ тоже связно.

в) Рассмотрим на пространстве X отношение $x \sim y \Leftrightarrow$ существует связное подпространство $A \subset X$, содержащее x и y. Докажите, что это отношение эквивалентности и соответствующие классы эквивалентности (*компоненты связности*) совпадают с максимальными по включению связными подмножествами в X.

г) Верны ли пункты а), б), в) для линейной связности?

10. Докажите, что если подпространство $A \subset X$ связно, то и его замыкание $\overline{A}$ также связно. Выведите отсюда, что компоненты связности всегда замкнуты. Следовательно, если их конечное число, то они также открыты.

11. а) Докажите, что произведение конечного числа связных пространств связно.

б) Докажите, что произведение $\prod X_\alpha$ связно $\Leftrightarrow$ каждый множитель X_α связен.

в) Верно ли это для линейной связности?

12. Пространство X называется *локально связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности $x \in U$ существует связная окрестность $x \in V$, такая что $V \subset U$. Приведите примеры локально связного несвязного пространства и связного, но не локально связного пространства. Докажите, что в локально связном пространстве компоненты связности открыты. Выведите отсюда, что в этом случае $X \cong \bigsqcup X_\alpha$, где X_α — компоненты связности.

13. Докажите, что любое открытое подмножество $\mathbb{R}$ равно объединению непересекающихся интервалов. Какой может быть мощность множества таких интервалов?

14. Докажите, что компактное хаусдорфово пространство удовлетворяет аксиоме отделимости T_4. Выведите отсюда, что компактное хаусдорфово пространство является *локально компактным*, то есть, для любой точки x и любой её окрестности $x \in U$ существует такая окрестность $x \in V$, что $\overline{V}$ — компактно и $\overline{V} \subset U$.

15. Пусть любая точка пространства X обладает линейно связной окрестностью. Докажите, что тогда из связности X следует его линейная связность. В частности, если пространство X *локально линейно связно* (то есть, для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности $x \in U$ существует линейно связная окрестность $x \in V$, такая что $V \subset U$), то $X \cong \bigsqcup X_\alpha$, где X_α — компоненты линейной связности.

16. Докажите, что следующие пары пространств не гомеоморфны:

а) $[0;1]$ и $(0;1)$;

б) $(0;1)$ и $[0;1)$;

в) прямая $\mathbb{R}$ и n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$;

г) окружность S^1 и сфера S^n при $n > 1$;

д) окружность S^1 и отрезок $[0;1]$;

е) $\mathbb{R}P^1$ и $\mathbb{R}P^n$ при $n > 1$.

17. Докажите, что группа $GL_n(\mathbb{C})$ (с топологией открытого подмножества в $Mat_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$) линейно связна. Сколько компонент связности у группы $GL_n(\mathbb{R})$? Компактны ли эти группы?

18. Будем рассматривать группы матриц $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ и $SU(n)$ с топологией, индуцированной из пространства всех матриц (которое, в свою очередь, гомеоморфно $\mathbb{R}^{n^2}$ или $\mathbb{C}^{n^2}$).

Докажите, что

а) $SO(2) \cong S^1$;

б) $SU(2) \cong S^3$;

в) $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$;
г) $O(n) \cong SO(n) \sqcup SO(n) \cong SO(n) \times S^0$;
д) $U(n) \cong SU(n) \times S^1$.

19. Компактны ли группы $O(n)$ и $U(n)$? А $SO(n)$ и $SU(n)$?

20. Докажите, что

а) произведение $\prod X_\alpha$ хаусдорфово тогда и только тогда, когда все X_α хаусдорфовы (пространства X_α подразумеваются непустыми);

б) произведение $\prod X_\alpha$ локально компактно тогда и только тогда, когда все X_α локально компактны и все, кроме конечного числа, компактны (пространства X_α подразумеваются непустыми);

в) дизъюнктное объединение $\bigsqcup X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме T_i, $i = 1, 2, 3, 4 \Leftrightarrow$ все пространства X_α удовлетворяют аксиоме T_i;

г) дизъюнктное объединение $\bigsqcup X_\alpha$ локально компактно $\Leftrightarrow$ все пространства X_α локально компактны;

д) дизъюнктное объединение $\bigsqcup X_\alpha$ компактно $\Leftrightarrow$ все X_α компактны и из них лишь конечное число непусты.

21. а) Приведите пример нормального пространства X и такого факторотображения $X \to X/\sim$, что факторпространство не удовлетворяет T_1.

б) Пусть $f\colon X \to Y$ непрерывная и замкнутая сюръекция (то есть, образ замкнутого множества замкнут). В частности, топология на Y совпадает с фактортопологией относительно f. Проверьте, что тогда, если пространство X удовлетворяет аксиоме T_i ($i = 1, 2, 3, 4$), то той же аксиоме удовлетворяет и пространство Y.

в) Приведите пример таких вложений $A \hookrightarrow X$ и $A \hookrightarrow Y$, что пространства A, X и Y нормальны, но склейка $X \cup_A Y$ не хаусдорфова. Может ли в таком случае пространство $X \cup_A Y$ не удовлетворять T_1?

г) Докажите, что если пространства A, X и Y нормальны и даны отображение $A \to X$ и замкнутое вложение $A \hookrightarrow Y$, то склейка $X \cup_A Y$ является нормальным пространством, причём индуцированное отображение $Y \to X \cup_A Y$ является замкнутым вложением.

22. Рассмотрим график $\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0;1]\} \subset \mathbb{R}^2$. Докажите, что подпространство Γ линейно связно, но его замыкание $\overline{\Gamma}$ не линейно связно.

23. Докажите, что нормированное пространство локально компактно тогда и только тогда, когда в нём компактны все замкнутые шары. Верно ли это для метрических пространств?

24. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ и любого пространства Z индуцированные отображения $f_Z^*\colon C(Y,Z) \to C(X,Z)$ и $f_*^Z\colon C(Z,X) \to C(Y,Z)$ непрерывны (в компактно-открытой топологии)

25. Пусть пространство X удовлетворяет аксиоме T_4. Рассмотрим два его замкнутых непересекающихся подмножества A и B.

а) Пользуясь аксиомой T_4, постройте такую систему открытых множеств U_r, индексированных рациональными числами r из отрезка $[0;1]$, что $\overline{U_r} \subset U_{r'}$ при $r < r'$ и $A \subset U_0$, $B \subset X - U_1$.

б) Для системы U_r, построенной в предыдущем пункте, докажите, что функция $f\colon X \to [0;1]$, определяемая формулой $f(x) = \inf\{r \mid x \in U_r\}$ для $x \in U_1$ и $f(x) = 1$ для $x \in X - U_1$, является непрерывной.

Проверьте, что построенная функция равна 0 на A и равна 1 на B. Это *лемма Урысона*: для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств A и B пространства X, удовлетворяющего аксиоме T_4, существует непрерывная функция $f\colon X \to [0;1]$, такая что $f|_A = 0$ и $f|_B = 1$. Является ли для этого свойства аксиома T_4 необходимой? Проверьте, что тогда для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств A и B пространства X, удовлетворяющего аксиоме T_4, существует непрерывная функция $f\colon X \to [0;1]$, такая что $f|_A = a$ и $f|_B = b$ для любых двух различных значений $a, b \in \mathbb{R}$.

26. Рассмотрим пространство X, удовлетворяющее аксиоме T_4, его замкнутое подмножество F и непрерывную функцию $f\colon F \to [0;1]$.

а) Определим индуктивно функции $g_n\colon X \to [0;1]$ следующим образом: $g_0 = 0$; если построены $g_0, \ldots, g_n$, рассмотрим функцию $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{k-1} g_k$ и, пользуясь леммой Урысона, определим функцию $g_{n+1}\colon X \to [0;1]$, равную -1 на замкнутом множестве $\{x \in F \mid f(x) \leqslant S_n(x) - \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$ и равную 1 на множестве $\{x \in F \mid f(x) \geqslant S_n(x) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n\}$. Докажите, что последовательность S_n равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $S\colon X \to [0;1]$, причём $S|_F = f$.

б) Докажите, что любое непрерывное отображение $F \to \mathbb{R}^n$ продолжается до непрерывного отображения $X \to \mathbb{R}^n$. Это *теорема Титце–Урысона о продолжении.* Верно ли это для незамкнутых подмножеств? Необходима ли здесь аксиома T_4?

27. Докажите, что пространство X обладает счётной базой и удовлетворяет аксиоме T_3 $\Leftrightarrow$ его можно вложить в счётное произведение отрезков $[0;1]^{\mathbb{N}}$. В частности, такие пространства метризуемы.

28. Докажите, что если пространство X хаусдорфово, а пространство Y хаусдорфово и локально компактно, то отображение $\Phi\colon C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y, Z))$ является гомеоморфизмом.

29. Докажите, что

а) отображение $f\colon A \to X$ является топологическим вложением $\Leftrightarrow$ для любого пространства Z индуцированное отображение $f_*^Z\colon C(Z, A) \to C(Z, X)$ является топологическим вложением;

б) биекция $C(\bigsqcup X_\alpha, Y) \to \prod C(X_\alpha, Y)$ является гомеоморфизмом;

в) если Y локально компактно, то биекция $C(Y, \prod X_\alpha) \to \prod C(Y, X_\alpha)$ является гомеоморфизмом;

г) если пространства X и Y локально компактны и отображение $f\colon X \to Y$ факторное, то для любого пространства Z индуцированное отображение $f_Z^*\colon C(Y, Z) \to C(X, Z)$ является топологическим вложением;

д) если пространство Z локально компактно, то $C(Z, X \times_B Y)$ гомеоморфно $C(Z, X) \times_{C(Z,B)} C(Z, Y)$;

е) если пространство $X \cup_A Y$ локально компактно, то $C(X \cup_A Y, Z)$ гомеоморфно $C(X, Z) \times_{C(A,Z)} C(Y, Z)$.

30. Подмножество $A \subset X$ топологического пространства X называется *G_δ-множеством*, если оно является пересечением счётного числа открытых подмножеств в X: $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Подмножество $A \subset X$ называется *функционально замкнутым*, если существует такая непрерывная функция $f\colon X \to [0;1]$, что $A = f^{-1}(\{0\})$.

а) Докажите, что любое функционально замкнутое подмножество является G_δ-множеством. Докажите, что в метризуемом пространстве любое замкнутое множество является функционально замкнутым.

б) Приведите пример замкнутого, но не функционально замкнутого подмножества.

в) Проверьте, что для любых непересекающихся функционально замкнутых подмножеств F_1 и F_2 существует непрерывная функция $f\colon X \to [0;1]$, такая что $f^{-1}(\{0\}) = F_1$ и $f^{-1}(\{1\}) = F_2$.

г) Докажите, что если пространство X удовлетворяет аксиоме T_4, то его подмножество A функционально замкнуто $\Leftrightarrow$ оно замкнуто и является G_δ-множеством.

д) Докажите, что конечные объединения и не более чем счётные пересечения функционально замкнутых подмножеств функционально замкнуты.

31. Докажите, что метризуемое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция на нём ограничена.

32. Докажите, что для компактного пространства X и метрического пространства (Y, d) компактно-открытая топология на $C(X, Y)$ совпадает с топологией, определяемой метрикой $d_C(f, g) = \max\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$.

33. Докажите, что метризуемое компактное пространство всегда сепарабельно. Приведите пример компактного несепарабельного пространства.

34. Докажите, что для любого метризуемого компактного пространства X существует непрерывная сюръекция $K \to X$ из канторова множества K.

35. Докажите, что для метризуемого компактного пространства X существует непрерывная сюръекция $I \to X$ из отрезка $I = [0;1]$ тогда и только тогда, когда пространство X связно и локально связно.

В частности, для любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ между метризуемыми компактами, если X локально связно, то и образ f также локально связен. Верно ли это для отображений произвольных пространств?