

Листок 1

Дедлайн: 15 Сентября 2025, 23:59 МСК.

Комментарий: Каждая задача стоит 5 баллов.

1 Линейная алгебра

Если не оговорено противное, то мы полагаем (V, h) – эрмитово векторное пространство, а $h = g + \sqrt{-1}\omega$ – эрмитова метрика.

Задача 1.1: Пусть A – комплексная матрица, а $A_{\mathbb{R}}$ – ее о веществление. Докажите, что $\det A_{\mathbb{R}} = |\det A|^2$

Задача 1.2: Докажите соотношение между вещественным и комплексным следами косоэрмитова оператора $A : V \rightarrow V$:

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{C}} A = 2\sqrt{-1} \mathrm{Tr}_{\mathbb{R}}(A_{\mathbb{R}} J).$$

Задача 1.3:

- (а) Докажите, что пространство эндоморфизмов $I : V \rightarrow V$, удовлетворяющих $IJ + JI = 0$ может быть отождествлено с $V^{1,0} \otimes (V^*)^{0,1}$.
- (б) Докажите, что если $J(t)$ – гладкая кривая в пространстве комплексных структур, такая что $J(0) = J$, то $J(0)J'(0) + J'(0)J(0) = 0$. Выведите отсюда, что $V^{1,0} \otimes (V^*)^{0,1}$ являются инфинитезимальными деформациями комплексных структур.

Задача 1.4: Пусть α – вещественная форма типа $(1, 1)$ на V . Докажите, что

$$n(n-1)\alpha \wedge \alpha \wedge \omega^{n-2} = ((\mathrm{Tr}_{\omega} \alpha)^2 - |\alpha|_{\omega}^2)\omega^n.$$

Задача 1.5: Пусть (V, g) – вещественное векторное пространство размерности 2, на котором задана евклидова метрика g . Постройте на (V, g) оператор комплексной структуры. Выведите отсюда, что на любом ориентируемом римановом многообразии (M^2, g) существует поле тензорное поле операторов J , таких, что $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Задача 1.6: Пусть (V, g) – вещественное векторное пространство вещественной размерности 4, а g – лоренцева метрика сигнатуры $(1, 3)$. Покажите, что на $\Lambda^2(V)$ существует оператор комплексной структуры.

Комментарий: В предыдущих двух задачах стоит присмотреться к оператору Ходжа на формах.

Задача 1.7: Докажите неравенство Виртингера: если $W \subset V$ – векторное подпространство вещественной размерности $2k$. Пусть Vol_W – форма объема на W , индуцированная метрикой g . Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\omega^k|_W \leq k! \text{Vol}_W,$$

и равенство достигается тогда и только тогда, когда W – комплексное подпространство.

Задача 1.8: Пусть Ψ – форма типа $(n-1, n-1)$ на V . Покажите, что Ψ определяет $(1, 1)$ -форму на $\Lambda^{n-1}V$. Покажите также, что если $\Psi = \omega^{n-1}$ для некоторой $(1, 1)$ -формы ω , то $\det \Psi = (\det \omega)^{n-1}$.

Задача 1.9: Докажите, что для $(1, 1)$ -форм и $(n-1, n-1)$ -форм понятия положительности и сильной положительности совпадают.

Задача 1.10: Придумайте пример положительной формы $\beta \in \Lambda^{p,p}(V^*)$, которая не является строго положительной.

2 Голоморфные функции многих переменных

В этом разделе все задачи посвящены базовым фактам о голоморфных функциях нескольких переменных. Почти все из них являются прямыми обобщениями известных фактов из стандартного курса комплексного анализа.

Задача 2.1: Докажите, что ограниченная голоморфная функция на $\mathbb{C}^n$ является константой.

Задача 2.2: Докажите, что вещественная и мнимая части голоморфной функции являются гармоническими функциями. Т.е. если $f = u + \sqrt{-1}v$, то $\Delta u = \Delta v = 0$, где Δ – стандартный оператор Лапласа на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.

Задача 2.3: Пусть $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ – голоморфная функция, а $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – некоторый мультииндекс. Предположим, что существует константа C , такая что $|f(z)| \leq C|z^\alpha|$. Докажите, что f является полиномом степени не выше α .

Задача 2.4: Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ – область, а $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$ – голоморфные функции в Ω . Докажите, что если

$$\sum_{j=1}^k |f_j|^2 = \text{const},$$

то каждая из f_j является константой.

Задача 2.5: Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ – область, а $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ – непостоянная голоморфная функция. Докажите, что множество $f(\Omega) \subset \mathbb{C}$ открыто.

Задача 2.6: Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ – область, а $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ – непостоянная голоморфная функция. Докажите, что $\Omega \setminus f = 0$ открыто и связно.

Задача 2.7: Докажите, что если последовательность органиченных голоморфных функций $\{f_j\}$ на Ω содержит сходящуюся подпоследовательность.

Задача 2.8: Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, а $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ – голоморфное отображение. Докажите, что $\det J_{\mathbb{R}}(f) = |\det J_{\mathbb{C}}(f)|^2$.

Задача 2.9: Пусть $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ – голоморфная биекция, где $\Omega_i \subset \mathbb{C}^n$ – органиченные области. Докажите, что обратное отображение f^{-1} голоморфно.

Задача 2.10: Пусть $\psi = \psi_{\bar{k}} d\bar{z}^k$ – гладкая $(0, 1)$ -форма с компактным носителем в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, удовлетворяющая уравнению $\bar{\partial}\psi = 0$. Положим

$$u_{\bar{k}} := \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{C}} \frac{\psi_{\bar{k}}(z^1, \dots, z^{k-1}, \zeta, z^{k+1}, \dots, z^n)}{\zeta - z^k} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Покажите, что $u_{\bar{k}} = u_{\bar{m}} = u$ для всех $1 \leq k, m \leq n$. Покажите, что $\bar{\partial}u = \psi$ и u имеет компактный носитель.