

Листок 2
Геометрия
Конечные подгруппы $O(3)$, платоновы тела

Чтобы сдать этот листок, необходимо решить хотя бы 4 задачи. Каждый пункт в задаче 1 рассматривается как отдельная задача, но только только один из них пойдёт в зачёт. Чтобы сдать задачу 4, нужно решить все пункты.

1. В сферу S^2 вписана

- а) (1) правильная шестиугольная пирамида; (2) двойная правильная шестиугольная пирамида (т. е. объединение двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием и вершинами в полюсах сферы);
- б) (1) правильная шестиугольная призма; (2) правильная пятиугольная усечённая пирамида.

Найдите группу симметрий (т. е. изометрий) этой фигуры и её группу движений. Как соотносится ответ с теоремой о конечных подгруппах в $SO(3)$?

2.

- а) Докажите, что прямоугольник, две противоположные стороны которого представляют собой два противоположных ребра правильного икосаэдра, является «золотым прямоугольником», т. е. его стороны находятся в отношении $(1 + \sqrt{5})/2$. Число $\varphi := (1 + \sqrt{5})/2$ называется золотым сечением.
- б) Убедитесь, что 12 точек $(\pm\varphi, \pm 1, 0)$, $(0, \pm\varphi, \pm 1)$, $(\pm 1, 0, \pm\varphi)$ расположены в вершинах правильного икосаэдра (в частности, икосаэдр действительно существует). Выведите отсюда также существование додекаэдра.

3. Докажите, что если правильный многогранник имеет символ Шлефли $\langle p, q \rangle$, то $1/p + 1/q > 1/2$. Выведите отсюда, что любой правильный многогранник — одно из 5 платоновых тел.

4.

- а) Докажите, что сумма углов выпуклого многогранника в E^3 равна $2\pi(P - \Gamma)$.
- б) Докажите, что сумма углов выпуклого многогранника в E^3 равна $2\pi(B - 2)$.
- с) Докажите теорему об эйлеровой характеристике выпуклого многогранника в E^3 .
- д) Верна ли теорема об эйлеровой характеристике для невыпуклых многогранников в E^3 ? Если да, то докажите её, если нет, то постройте контрпример.

5. Существует ли в группе движений куба подгруппа, изоморфная группе движений правильного тетраэдра?

6. Существует ли в группе движений додекаэдра подгруппа, изоморфная группе движений куба?

7. В группе движений куба найдите все подгруппы, изоморфные группам $\mathbb{Z}_n$ и D_n для всевозможных значений n . Есть ли в ней ещё какие-либо подгруппы?