ТОПОЛОГИЯ–3
ЛИСТОК 3: ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ

ЛЕКТОР: Т.Е. ПАНОВ

1. Пусть M^3 — замкнутое односвязное многообразие. Докажите, что $M \simeq S^3$.

2. Докажите, что компактное многообразие не ретрагируется на свой край.

3. Пусть M^m — замкнутое ориентированное многообразие, а $i : N^n \hookrightarrow M^m$ — вложение замкнутого ориентированного подмногообразия. Пусть $x \in H^{m-n}(M)$ — класс, двойственный по Пуанкаре к $i_*[N] \in H_n(M)$. Докажите, что для любого класса когомологий $y \in H^n(M)$ имеет место формула

$$\langle i^*(y), [N] \rangle = \langle x \smile y, [M] \rangle,$$

где $\langle -, - \rangle : H^k(X; R) \times H_k(X; R) \to R$, $\langle [\alpha], [c] \rangle := \alpha(c)$ — спаривание Кронекера.

4. Пусть отображение замкнутых ориентированных многообразий $f : N^n \to M^n$ имеет степень k, то есть $f_*([N]) = k \cdot [M] \in H_n(M)$.
а) Постройте гомоморфизм $f^! : H_*(M) \to H_*(N)$ такой, что $f_*(f^!(x)) = kx$.
б) Пусть $1/k \in R$. Докажите, что $f_* : H_*(N; R) \to H_*(M; R)$ — проекция на прямое слагаемое, а $f^* : H^*(M; R) \to H^*(N; R)$ — вложение прямого слагаемого. Будет ли проекция $H^*(N; R) \twoheadrightarrow H^*(M; R)$ гомоморфизмом колец?
в) Пусть $k = 1$. Докажите, что гомоморфизм $\pi_1(N) \to \pi_1(M)$ сюръективен.

5. Пусть M^{4k+2} — замкнутое ориентируемое многообразие. Докажите, что группа $H_{2k+1}(M)$ имеет чётный ранг.

6. Пусть $X^+ = X \sqcup \{\infty\}$ — *одноточечная компактификация* пространства X (базу топологии составляют открытые подмножества $U \subset X$, а также множества вида $\{\infty\} \sqcup X \setminus K$, где $K \subset X$ — компакт.) Предположим, что $\infty \in X^+$ имеет окрестность, гомеоморфную конусу над ∞. Докажите, что $H_c^*(X) \cong H^*(X^+, \{\infty\})$.

7. Пусть вложение $K \to S^n$ удовлетворяет свойству продолжения гомотопии (в частности, $K \subset S^n$ замкнуто). Докажите *изоморфизм двойственности Александера–Понтрягина*

$$\widetilde{H}_i(S^n \setminus K) \cong \widetilde{H}^{n-i-1}(K).$$

(На самом деле этот изоморфизм верен для любого гомеоморфного вложения $K \to S^n$, если K — локально стягиваемый компакт.)

8. Пусть K — симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \ldots, m\}$, отличный от полного симплекса Δ^{m-1}. Определим *двойственный комплекс*

$$\widehat{K} := \{I \subset [m] : [m] \setminus I \notin K\},$$

т.е. наборами вершин симплексов из $\widehat{K}$ являются дополнения до наборов вершин, не порождающих симплексы в K. Докажите изоморфизмы групп симплициальных (ко)гомологий

$$\widetilde{H}_j(K) \cong \widetilde{H}^{m-3-j}(\widehat{K}).$$

(Это комбинаторная версия двойственности Александера–Понтрягина.)