

Семинар 3 (6 марта). Экспоненциальное отображение.

Задача 1. (а) Докажите, что если G – связная группа Ли и её алгебра Ли абелева, то G – коммутативная группа Ли.

(б) Покажите, что любая компактная комплексная связная группа Ли коммутативна. *Указание: рассмотрите присоединённое действие группы на её алгебре Ли.*

(в) Комплексная компактная группа Ли размерности ≥ 1 не может быть комплексно-линейной.

Задача 2. (а) Алгебра Ли \mathfrak{g} задана образующими и соотношениями $\langle x, y, z \mid [x, y] = y - z, [x, z] = y + z, [y, z] = 0 \rangle$. Опишите какую-нибудь группу Ли с такой алгеброй Ли.

(б) Опишите все связные виртуальные подгруппы Ли в этой группе.

Задача 3. Выпишите явно лево- и правоинвариантные векторные поля на $Aff_1^+(\mathbb{R})$, группе аффинных преобразований прямой, сохраняющих ориентацию.

Задача 4. Докажите, что $\ker Ad = Z(G)$, в частности, $Z(G)$ – замкнутая подгруппа группы Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. (а) Докажите, что \exp сюръективно, но не инъективно для $GL_n(\mathbb{C})$.

(б) Пусть $G = GL_n^+(\mathbb{R})$, группа матриц с положительным определителем. Докажите, что экспоненциальное отображение $\mathfrak{g} \rightarrow G$ не сюръективно, но квадрат любого элемента G лежит в образе экспоненциального отображения.

Задача 2. Снабдите множество $Aut(G)$ автоморфизмов группы Ли G структурой линейной группы Ли.

Задача 3. $SL_2(\mathbb{C})$ действует на $\mathbb{C}P^1$ дробно-линейными преобразованиями: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Вычислите в базисе $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ и координате z на $\mathbb{C}P^1$ соответствующее отображение векторных полей.

Дополнительные задачи

Задача 4. Используя классификацию абелевых групп Ли, докажите основную теорему алгебры. *Указание: рассмотрите группу обратимых элементов расширения \mathbb{C} .*

Задача 5. (а) Опишите все подалгебры Ли в алгебре $\mathfrak{su}_2 \oplus \mathfrak{su}_2$. Какие из них являются идеалами? *Указание: рассмотрите проекции из искомой подалгебры на прямые слагаемые. Что можно сказать об их ядре, образе?*

(б) Опишите все виртуальные подгруппы в группе Ли $SU_2 \times SU_2$. Какие из них замкнуты? Нормальны?

(в) Опишите все гомоморфизмы $SU_2 \times SU_2 \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$

Задача 6. Опишите все одномерные комплексные группы Ли с точностью до изоморфизма.