7. Лекция 7. Торические и картановские подалгебры. Корневое разложение.

Все алгебры Ли в этой лекции конечномерные и над полем $\mathbb{C}$.

7.1. **Полупростые алгебры Ли.**

Теорема 7.1. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли. Тогда $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$ – прямая сумма алгебр Ли, причём все $\mathfrak{g}_i$ – простые алгебры Ли. Более того, набор простых алгебр в разложении определён однозначно.

Доказательство.

Лемма 7.2. Пусть $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, $I \subset \mathfrak{g}$ – идеал. Тогда $\mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp}$ (прямая сумма алгебр Ли) и $K(I, I^{\perp}) = 0$.

Доказательство. Форма K – инварианта и невырождена, значит, $I^{\perp}$ – идеал и

$$\dim I + \dim I^{\perp} = \dim \mathfrak{g}.$$

При этом $I \cap I^{\perp}$ – идеал с нулевой формой Киллинга, значит, разрешим, откуда следует, что $I \cap I^{\perp} = 0$. □

Пусть $I \subset \mathfrak{g}$ – ненулевой идеал минимальной размерности. Тогда из утверждения лемма имеем $\mathfrak{g} = I \oplus I^{\perp}$ причём $[I, I^{\perp}] = 0$. Это означает, что если $J \subset I$ – ненулевой идеал в I, то J идеал в $\mathfrak{g}$, а значит $J = I$. Отсюда I – простая алгебра Ли и далее утверждение теоремы следует из индукции по размерности $\mathfrak{g}$.

Единственность следует из следующего наблюдения: Если $I \subset \mathfrak{g}$ простой идеал, то $[I, \mathfrak{g}] = I$. С другой стороны, $I = [I, \mathfrak{g}] = [I, \mathfrak{g}_1] \oplus \ldots \oplus [I, \mathfrak{g}_n]$, значит все слагаемые кроме одного нулевые. Если $[I, \mathfrak{g}_i] = I$, то $I \subset \mathfrak{g}_i$, а значит $I = \mathfrak{g}_i$, так как $\mathfrak{g}_i$ – простая. □

Предложение 7.3.
(1) Если $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n$, где $\mathfrak{g}_i$ – простые, то любой идеал $\mathfrak{g}$ имеет вид $\mathfrak{g}_{i_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_{i_k}, \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$;
(2) Идеалы и гомоморфные образ поплупростой алгебры полупросты.
(3) $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Доказательство. 1) Пусть $I \subset \mathfrak{g}$ – идеал. Рассмотрим проекцию $\pi_n : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_n$. Тогда $\pi_n(I) \subset \mathfrak{g}_n$ – идеал в $\mathfrak{g}_n$, а значит $\pi_n(\mathfrak{g}_n) = 0$ или $\pi_n(\mathfrak{g}_n) = \mathfrak{g}_n$. В первом случае $I \subset \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g}_i$ и утверждение следует по индукции. Иначе $\pi_n(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}_n$. В этом случае $[\mathfrak{g}_n, I] = [\mathfrak{g}_n, \pi(I)] = [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n] = \mathfrak{g}_n$. Так как I – идеал, отсюда следует, что $I \supset \mathfrak{g}_n$, а значит $I = I' \oplus \mathfrak{g}_n$, где I' идеал в $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g}_i$ и далее утверждение следует по индукции.
2) Про идеалы доказано в пункте 1). Если $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ – гомоморфизм алгебр Ли и $\mathfrak{g}_1$ – полупроста, то $\operatorname{Ker} \varphi$ – идеал $\mathfrak{g}_1$, а значит $Im\varphi \simeq \mathfrak{g} / \operatorname{Ker} \varphi$ – полупроста.

3) Для любого i $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_i$, так как $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$ идеал в $\mathfrak{g}_i$, а $\mathfrak{g}_i$ простая. Отсюда следует утверждение для полупростой $\mathfrak{g}$. □

Замечание 7.4. Заметим, что подалгебра полупростой алгебры не обязательно полупроста (например, любая одномерная).

7.2. **Дифференцирования полупростой алгебры.**

Пусть A – не обязательно ассоциативная конечномерная алгебра. Напомним, что линейной отображение $\delta : A \to A$ называется дифференцированием, если

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

Более того, $Der A$ – все дифференцирования алгебры A – образуют алгебру Ли. Если $A = \mathfrak{g}$ – алгебра Ли, то для любого $x \in \mathfrak{g}$ оператор $\operatorname{ad} x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – дифференцирование. Обозначим через $\operatorname{ad} \mathfrak{g} \subset \operatorname{Der} \mathfrak{g}$ подпространство внутренних дифференцирований. Из равенства

$$[\delta, \operatorname{ad} x] = \operatorname{ad} \delta(x)$$

следует, что $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ идеал в $\operatorname{Der} \mathfrak{g}$.

Предложение 7.5. Если $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, то $\operatorname{ad}\mathfrak{g} = \operatorname{Der}\mathfrak{g}$.

Доказательство. Обозначим через $I = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$ идеал в $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$ и рассмотрим идеал

$$I^{\perp} = \{x \in \operatorname{Der}\mathfrak{g} \mid K(x, y) = 0 \ \forall\ y \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}\}.$$

Тогда $I \cap I^{\perp}$ – идеал с нулевой формой Киллинга, значит, $I \cap I^{\perp} = 0$. Более того, $[I, I^{\perp}] \subset I \cap I^{\perp}$, значит, $[I, I^{\perp}] = 0$. Далее, если $\delta \in I^{\perp}$, то для любого $z \in \mathfrak{g}$ $[\delta, \operatorname{ad} z] = \operatorname{ad}\delta(z) = 0$, откуда $\delta(z) = 0$ для любого $z \in \mathfrak{g}$, так как $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – инъективно. Отсюда $\delta = 0$, то есть $I^{\perp} = 0$.

Пусть теперь $\delta \in \operatorname{Der}\mathfrak{g}$. Тогда отображение $z \mapsto K(\delta, \operatorname{ad} z)$ – линейный функционал на $\mathfrak{g}$. Так как K на $\mathfrak{g}$ невырождена, то существует $x \in \mathfrak{g}$, что $K(\delta, \operatorname{ad} z) = K(z, x)$ для любого $z \in \mathfrak{g}$. Но тогда $K(\delta - \operatorname{ad} x, \operatorname{ad} z) = 0$ для любого z, откуда $\delta - \operatorname{ad} x \in I^{\perp} = 0$, то есть $\delta = \operatorname{ad} x$.

□

Лемма 7.6. Пусть A – алгебра, $\delta \in \operatorname{Der} A \subset \operatorname{End} A$ и $\delta = \delta_s + \delta_n$ – разложение Жордана. Тогда $\delta_s, \delta_n \in \operatorname{Der} A$

Доказательство. Хамфрис, Лемма 4.2.B. □

7.3. **Абстрактное разложение Жордана и торические подалгебры.** Если $\mathfrak{g}$ – полупростая алгебра Ли, то $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ – инъективно. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ рассмотрим разложение Жордана $\operatorname{ad} x = (\operatorname{ad} x)_s + (\operatorname{ad} x)_n$. Тогда существуют единственные $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ такие, что $x = x_s + x_n$, причём оператор $\operatorname{ad} x_s = (\operatorname{ad} x)_s$ – полупрост, а $\operatorname{ad} x_n = (\operatorname{ad} x)_n$ – нильпотентен. Такое разложение элемента полупростой алгебры Ли называется абстрактным разложением Жордана.

Из Предложения 7.5 и Леммы 7.6 следует, что в любой полупростой алгебре Ли существует элемент с ненулевой полупростой частью в разложении Жордана. Действительно, если такого элемента нет, то все элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентны, а значит алгебра Ли $\mathfrak{g}$ одновременно полупроста и нильпотентна, а значит $\mathfrak{g} = 0$.

Определение 7.7. Подалгебра $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ называется торической, если она

(1) коммутативна;
(2) состоит из полупростых элементов.

Обсуждение выше показывает, что торические подалгебры существуют.

Примеры. Подалгебра диагональных матриц алгебры $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ – торическая.

Замечание 7.8. Название торическое проясняет следующее наблюдение. Рассмотрим $\exp : \mathfrak{g} \to \tilde{G}$, где $\tilde{G}$ – односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда образ $\exp(\mathfrak{h})$ – алгебраический тор в G, то есть произведение нескольких копий $\mathbb{C}^{\times}$. Это видно на примере подалгебры диагональных матриц в $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$.

7.4. **Разложение алгебры Ли относительно торической подалгебры.** Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ некоторая торичекая подалегбра. Согласно известному результату из линейной алгебры, семейство коммутирующих полупростых операторов можно одновременно диагонализировать в некотором базисе. Отсюда получаем разложение

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \mathfrak{g}_\alpha,$$

где $\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \ \forall\ h \in \mathfrak{h}\}$. Это разложение обладает следующими свойствами:

Теорема 7.9. (1) $\mathfrak{g}_0 = C(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \ \forall\ y \in \mathfrak{h}\}$.
(2) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
(3) Если $x = x_s + x_n \in \mathfrak{g}_0$ – абстрактное разложение Жордана, то $x_s, x_n \in \mathfrak{g}_0$.
(4) $K(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ если $\alpha + \beta \neq 0$.

(5) Ограничение K на $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_{-\alpha}$ невырождено.
(6) Ограничение K на $\mathfrak{g}_0$ невырождено.
(7) $\mathfrak{g}_0$ – редуктивна.

Доказательство. Кириллов, Теорема 7.7. $\square$