

ТОПОЛОГИЯ–2

ЛИСТОЧЕК 5: ГОМОЛОГИИ И ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

1. Докажите, что для линейно связного пространства X гомоморфизм надстройки $\pi_1(X) \rightarrow \pi_2(\Sigma_\bullet X)$ является абелианизацией.

2. Приведите пример нестягиваемого клеточного пространства X , у которого все приведённые группы гомологий равны нулю.

Такое пространство X и точка pt дают пример двух пространств, для которых существуют отображения $X \rightleftarrows pt$, индуцирующие изоморфизмы на всех гомологиях, но при этом X и pt не слабо эквивалентны.

3. Докажите, что отображение f между односвязными клеточными пространствами является гомотопической эквивалентностью, если его конус $C(f) := C(X) \cup_f Y$ стягиваем. Приведите пример, когда это неверно для неодносвязных пространств.

4. Докажите, что если отображение $f: X \rightarrow Y$ между клеточными пространствами индуцирует изоморфизм на гомологиях, то его надстройка $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ является гомотопической эквивалентностью (заметьте, что X и Y не обязательно связны).

5. Докажите, что если X — (клеточное) пространство типа $K(\pi, 1)$, то абелевы группы $\pi_n(X^n)$, $n \geq 2$ являются свободными (здесь X^n — n -остов).

6. а) Докажите, что если для односвязного клеточного пространства X выполнено $H_i(X) \cong H_i(S^n)$ для всех i , то $X \simeq S^n$. (Для неодносвязных пространств это неверно! Такие пространства называются *гомологическими сферами*.)

б) Докажите, что для любого натурального числа $n > 1$ и любой абелевой группы A существует единственное с точностью до гомотопической эквивалентности односвязное клеточное пространство X , такое что все приведённые группы гомологий X равны нулю, за исключением $H_n(X) = A$. Такое пространство называется *пространством Мура* $M(A, n)$.

в)* Докажите, что пространство Мура $M(G, 1)$ с $\pi_1(M(G, 1)) = G$ существует тогда и только тогда, когда $H_2(K(G, 1)) = 0$. Приведите пример группы G , для которой это неверно.

Согласно задаче 10 листочка 2, для любого n пространства Эйленберга–Маклейна задают (вполне точные) функторы $G \rightarrow K(G, n)$ из категории групп (абелевых при $n > 1$) в пунктированную гомотопическую категорию клеточных пространств.

В свою очередь, можно доказать, что пространства Мура не могут составлять такого функтора, то есть, нельзя определить пространства $M(A, n)$ так, чтобы для любого гомоморфизма $A \rightarrow B$ было определено отображение $M(A, n) \rightarrow M(B, n)$ и композициям соответствовали композиции (с точностью до гомотопии).

7. Докажите, что если $n > 1$, то $H_{n+1}(K(\pi, n)) = 0$.

8. а) Покажите, что если пространство X является $(n - 1)$ -связным при $n > 1$, то гомоморфизм Гуревича $hur: \pi_{n+1}(X) \rightarrow H_{n+1}(X)$ сюръективен.

б) Для линейно связного X докажите, что коядро $soker\ hur := H_2(X)/hur(\pi_2(X))$ изоморфно группе $H_2(K(\pi_1(X), 1))$.

9. Пусть X — связное клеточное пространство с $\pi_i(X) = 0$ при $1 < i < n$ для некоторого $n \geq 2$. Докажите, что $H_n(X)/hur(\pi_n(X)) \cong H_n(K(\pi_1(X), 1))$.

10. Докажите, что $hur([\alpha, \beta]) = 0$, где $\alpha \in \pi_n(X)$, $\beta \in \pi_k(X)$ и $[\alpha, \beta] \in \pi_{n+k-1}(X)$ — их произведение Уайтхеда (см. задачу 15 листочка 2).

11.* Докажите, что группа $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ не может свободно действовать ни на каких сферах.

12. Пространство Y называется *гомотопическим ретрактом* пространства X , если существуют отображения $i: Y \rightarrow X$, $r: X \rightarrow Y$, такие что композиция $r \circ i$ гомотопна тождественному отображению. Докажите, что если односвязное клеточное пространство Y является гомотопическим ретрактом букета сфер (например, если $Y \vee Z \simeq \bigvee S^{n_i}$ для некоторого пространства Z), то Y также гомотопически эквивалентно букету сфер.

13. Докажите, что если связное клеточное пространство X ретрагируется на своё клеточное подпространство A , то $\Sigma X \simeq \Sigma A \vee \Sigma(X/A)$ (то есть, после надстройки любая ретракция с точностью до гомотопии является вложением прямого слагаемого в букет).

14. Приведите пример такого отображения клеточных пространств $X \rightarrow Y$, что оно индуцирует изоморфизм фундаментальных групп и всех групп гомологий, но не индуцирует изоморфизм всех гомотопических групп.

15.* Пусть (X, A) — односвязная пара линейно связных пространств. Обозначим через $\pi_2(X, A)/\pi_1(A)$ факторгруппу группы $\pi_2(X, A)$ по нормальной подгруппе, порождённой произведениями $(\gamma \cdot x)x^{-1}$, где $x \in \pi_2(X, A)$, $\gamma \in \pi_1(A)$ и $\cdot$ — действие $\pi_1(A) \curvearrowright \pi_2(X, A)$. Тогда гомоморфизм Гуревича определяет гомоморфизм $hur: \pi_2(X, A)/\pi_1(A) \rightarrow H_2(X, A)$. Докажите, что это изоморфизм.

16. Пусть $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ — такое отображение клеточных пар, что ограничение $f: A \rightarrow B$ и индуцированное факторотображение $X/A \rightarrow Y/B$ являются гомотопическими эквивалентностями. Докажите, что в таком случае $f: X \rightarrow Y$ является гомотопической эквивалентностью, если пространства X и Y односвязны.

Приведите пример, демонстрирующий, что для не односвязных пространств X и Y это неверно.

17. Докажите, что если конечная группа G имеет конечное представление, в котором число образующих равно числу соотношений, то $H_2(K(G, 1)) = 0$.

(Гомологии пространства $K(G, 1)$ называются *гомологиями группы G*).

18. Докажите, что если пространство X является m -связным, а Y — n -связным, то их джойн $X * Y$ является $(m + n + 2)$ -связным.

19.* Докажите, что букет клеточных пространств $K(G, 1) \vee K(H, 1)$ является пространством типа $K(G * H, 1)$.

20. Докажите, что для клеточного пространства X отображение $[X, S^1] \rightarrow \text{Hom}(H_1(X), \mathbb{Z})$, $f \mapsto (f_*: H_1(X) \rightarrow H_1(S^1) = \mathbb{Z})$ является биекцией, причём это будет изоморфизм групп, если ввести умножение на $[X, S^1]$ через умножение на группе S^1 . Докажите, что для связных X можно использовать π_1 вместо H_1 .

21. Пусть X — односвязное клеточное пространство, причём $H_k(X) = \mathbb{Z}^{\beta_k} \oplus T_k$ — конечнопорождённая абелева группа с кручением T_k . Пусть τ_k — (минимальное) количество циклических образующих T_k .

а) Докажите, что тогда X гомотопически эквивалентен клеточному пространству Y с количеством k -мерных клеток равным $\beta_k + \tau_k + \tau_{k-1}$ (для всех k), причём с меньшим количеством k -клеток найти такое Y нельзя.

б)* Докажите, что для не односвязного X это неверно.

22. Рассмотрим конечные $(n-1)$ -мерные клеточные пространства X' и Y' . Приклеим к ним n -мерные клетки: $X = X' \cup e^n$, $Y = Y' \cup e^n$. Предположим, что получилось $H_n(X) = \mathbb{Z}$, $H_n(Y) = \mathbb{Z}$.

Выберем внутри n -мерных клеток в X и Y маленькие шарики B_1^n и B_2^n и вырежем их: $X'' = X - B_1^n$, $Y'' = Y - B_2^n$. Границы вырезанных шариков представляют собой сферы S_1^{n-1} и S_2^{n-1} .

Теперь склеим эти сферы по гомеоморфизму $h: S_1^{n-1} \cong S_2^{n-1}$, обращающему ориентацию (ориентации на сферах берутся из характеристических отображений, отождествляющих внутренности клеток с $\mathbb{R}^n$ со стандартной ориентацией). Обозначим склейку через $X \# Y = (X - B_1^n) \cup_h (Y - B_2^n)$.

а) Докажите, что $\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - \chi(S^n) = \chi(X') + \chi(Y') - \chi(S^{n-1})$.

б)* Выразите гомологии $X \# Y$ через гомологии X и Y .

23.* Пусть $N \subset G$ — нормальная подгруппа с факторгруппой $H = G/N$. Докажите, что существует расслоение $K(G, 1) \rightarrow K(H, 1)$ со слоем (слабо эквивалентным) $K(N, 1)$. Если G — абелева, то тоже верно с заменой 1 на произвольное натуральное n . Покажите, что в абелевом случае также существуют расслоения $K(N, n) \rightarrow K(G, n)$ со слоем типа $K(H, n-1)$ и расслоения $K(H, n) \rightarrow K(N, n+1)$ со слоем типа $K(G, n)$.