Евклидовы пространства II

Задача 4.1. Обоснуйте «геометрические» определения ориентаций в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$:

а) базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ в $\mathbb{R}^2$ положительно ориентирован тогда и только тогда, когда угол от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ меньше π, (кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ происходит против часовой стрелки);

б) базис $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ в $\mathbb{R}^3$ положительно ориентирован тогда и только тогда, когда, если смотреть с конца вектора $\boldsymbol{c}$, кратчайший поворот от $\boldsymbol{a}$ к $\boldsymbol{b}$ происходит против часовой стрелки.

Задача 4.2. Стороны BC, CA и AB треугольника ABC разделены точками P, Q и R в отношениях

$$\overline{BP} : \overline{PC} = \lambda, \quad \overline{CQ} : \overline{QA} = \mu \quad \text{и} \quad \overline{AR} : \overline{RB} = \nu.$$

Найти отношение площади ориентированного треугольника PQR к площади ориентированного треугольника ABC.

Задача 4.3. Докажите, что $S(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin \alpha$, где α — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Докажите, что в $\mathbb{R}^2$ эта же формула даёт ориентированную площадь, если в качестве α брать угол от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$.

Задача 4.4. Докажите следующие тождества:

а) $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$; б) $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{c}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]] = 0$ (*тождество Якоби*);

в) $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}], [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}], [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^2$;

г) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{y}) \\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{z}) \end{vmatrix}$.

Задача 4.5. В трёхгранном угле $OABC$ пусть даны плоские углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ и противолежащие им двугранные углы A, B, C. Докажите формулы сферической геометрии:

а) $\sin\alpha \, \sin\gamma \, \cos B = \cos\beta - \cos\alpha \, \cos\gamma$, $\sin A \, \sin C \, \cos\beta = \cos B + \cos A \, \cos C$ (*теорема косинусов*),

б) $\sin\alpha / \sin A = \sin\beta / \sin B = \sin\gamma / \sin C$ (*теорема синусов*).

Задача 4.6. Даны две прямые $2x - y - 1 = 0$ и $11x + 2y + 8 = 0$.

а) Составьте уравнение биссектрисы острого угла между прямыми.

б) Составьте уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит точка $(1, 2)$.

Задача 4.7. Даны две пересекающиеся прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и точка (x_0, y_0), не лежащая ни на одной из этих прямых. Составьте уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит эта точка.

Задача 4.8. Даны две прямые: $\ell_1 \colon x + y = 0$ и $\ell_2 \colon x - 2y + 6 = 0$. Найдите такую прямую ℓ_3, что ℓ_2 является биссектрисой угла между ℓ_1 и ℓ_3.

Задача 4.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

Задача 4.10. Составьте уравнение общего перпендикуляра к двум прямым, заданным параметрически: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и $\frac{x-x_0'}{a'} = \frac{y-y_0'}{b'} = \frac{z-z_0'}{c'}$.

Задача 4.11. Составьте уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_1, y_1, z_1) на

а) плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$; б) прямую $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$.

Задача 4.12. Найдите уравнение перпендикуляра из точки $P = (1, -1, 2)$ на прямую $\ell \colon \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ и найдите расстояние $d(P, \ell)$.

Задача 4.13. Найдите точку, которая а) симметрична точке $(1, 3, -4)$ относительно плоскости $3x + y - 2z = 0$; б) симметрична точке $(1, 2, 3)$ относительно прямой $\frac{x-8}{1} = \frac{y-11}{3} = \frac{z-4}{-1}$.

Задача 4.14. Составьте уравнение ортогональной проекции прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ на плоскость $5x + 6y - 2z + 1 = 0$.

Задача 4.15. В ориентированном евклидовом n-мерном пространстве *обобщённым векторным произведением* упорядоченного набора из $n-1$ вектора $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ называется вектор $\boldsymbol{c}$, обозначаемый $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}]$ и однозначно задаваемый следующими свойствами:

1) $|\boldsymbol{c}| = \mathrm{vol}_{n-1}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1})$;

2) $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{c}) = 0$ при $i = 1, \ldots, n-1$;

3) если векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ линейно независимы, то базис $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{c}$ положительно ориентирован.

Докажите, что обобщённое векторное произведение полилинейно (линейно по каждому аргументу $\boldsymbol{a}_i$) и кососимметрично (меняет знак и перестановке любых двух векторов $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$).