

Георгий Борисович Шабат

Двойственность Понтрягина

Примерная программа курса

0. Обзор. Топологические группы. Группа характеров топологической группы. Первые примеры двойственных по Понтрягину пар групп: $\mathbb{C}_1 \leftrightarrow \mathbb{Z}$, $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}$. Ряды Фурье и интегралы Фурье, их применения.

1. Категория $\mathcal{LCA}$ локально-компактных абелевых групп. Преобразование Понтрягина $A \mapsto \hat{A}$ как инволютивный эндокофунктор на этой категории. Компактные и дискретные группы. Канонический изоморфизм $\hat{\hat{A}} \cong A$. Аналогия с эндокофунктором $V \mapsto V^*$ в категории конечномерных векторных пространств и с отрицанием в алгебре высказываний.

2. Группа $\mathbb{R}_{>0}^\times$. Преобразование Меллина. Гамма-функция. Тета- и дзета-функции, связь между их функциональными уравнениями. Применение к решению полиномиальных уравнений высших степеней.

3. Интегрирование в топологических группах. Инвариантные меры, мера Хаара. Теорема Планшереля и её обобщения. Случай конечных групп.

4. Неархимедовы аспекты двойственности Понтрягина. Метризации поля $\mathbb{Q}$, теорема Островского. Кольцо аделей и дискретная топология на $\mathbb{Q}$, функциональные аналоги. Группа целых p -адических чисел $\mathbb{Z}_p^+$ и про-ферова группа ${}^\infty\sqrt{\mathbb{Z}}$. Изоморфизм компактных топологических групп

$$\varprojlim_m \frac{\mathbb{Z}^+}{m\mathbb{Z}^+} \cong \prod_p \mathbb{Z}_p^+$$

и применение к нему преобразования Понтрягина. Аналоги и обобщения.

5. Арифметические приложения. Абелевы расширения поля $\mathbb{Q}$. Теория полей классов по А. Вейлю.

6. О p -адической и адельной физике. Начала p -адической теории струн. Амплитуды Венециано. Идеология *адельной демократии* Ю.И. Манина; его адельная интерпретация формулы $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.