Результант, дискриминант, теорема Безу.

Задача 1. [Формула Кардано] Рассмотрим кубическое уравнение $x^3 + px + q = 0$. Пусть $\omega^3 = 1, \omega \in \mathbb{C}, \omega \neq 1$. Определим $h_1 = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3, h_2 = x_1 + \omega^2 x_2 + \omega x_3$, где x_1, x_2, x_3 – корни уравнения.
а) Докажите, что h_1^3 и h_2^3 – корни уравнения $x^2 + 27qx - 27p^3 = 0$. **б)** Выведите отсюда формулу Кардано:
$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}$ (объясните, какие берутся значения кубических корней).

Задача 2. а) Докажите, что $R(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_n D(f)$.
б) Пусть старший коэффициент f, g равен 1. Тогда $D(fg) = D(f)D(g)R^2(f, g)$.

Задача 3. Найдите все точки пересечения кривых $y^2 + (x-4)y + x^2 - 2x + 3 = 0$ и $y^3 - 5y^2 + (x + 7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$.

Задача 4. Выведете теорему Паскаля из теоремы Безу: Если шестиугольник вписан в эллипс, то точки пересечения трёх пар противоположных сторон лежат на одной прямой.

Задача 5*. Верно ли, что если рассмотреть набор mn точек на плоскости $\Bbbk^2$ (поле $\Bbbk$ бесконечно), то существуют два многочлена $f, g \in \Bbbk[x, y]$ таких, что $\deg f = n, \deg g = m$ и при этом все эти точки являются общими корнями f и g?

Задача 6*. Выведите формулу корней уравнения $x^4 + px^2 + qx + e = 0$.