

ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА.

Задача 1. Исключите переменные $y_1, \dots, y_m$ из двух систем уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} b_{11}y_1 + \dots + b_{1m}y_m = z_1 \\ \dots \\ b_{k1}y_1 + \dots + b_{km}y_m = z_k \end{cases}$$

Докажите, что полученная таким образом матрица коэффициентов C системы $\begin{cases} c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n = z_1 \\ \dots \\ c_{k1}x_1 + \dots + c_{kn}x_n = z_k \end{cases}$ является произведением матриц B и A .

Задача 2. Найдите общее решение системы линейных уравнений над $\mathbb{Q}$ методом Гаусса:

$$\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

Задача 3. Выясните, являются ли линейно зависимыми наборы векторов:

а) $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$; **б)** $1, \sin x, \cos x, \dots, \sin(nx), \cos(nx)$; в векторном пространстве функций $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ и $\lambda_i \in \mathbb{R}$ различны.

Задача 4. а) Может ли поле из 27 элементов содержать подполе из 9 элементов? **б)** Для каких p, q, m, n поле из p^n содержит поле из q^m элементов?

Задача 5. Найдите размерность пространства **а)** многочленов степени не превосходящей n от k переменных и однородных многочленов степени n от k переменных;

б) многочленов с вещественными коэффициентами степени не больше n , обращающихся в нуль в точке $3 - 2i$; **в)** $\mathbb{k}[[t]]$, где $\mathbb{k}$ — не более чем счётное поле; **г)** $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$.

Задача 6. Образуют ли базис в пространстве $\mathbb{Q}[x]_{\leq n}$ многочленов степени не больше n многочлены

а) $(x - k)^n$; **б)** $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$, где $0 \leq k \leq n$.

Задача 7. а) Сколько всего имеется в n -мерном векторном пространстве над конечным полем из q элементов k -мерных векторных подпространств?

б) Пусть $\binom{n}{k}_q$ — число k -мерных векторных подпространств в $\mathbb{F}_q^n$. Найдите $\lim_{q \rightarrow 1} \binom{n}{k}_q$.

Задача 8. Пусть $\delta_a^{(k)}: \mathbb{k}[x] \xrightarrow{f \mapsto f^{(k)}(a)} \mathbb{k}$, $k \geq 0$, $a \in \mathbb{k}$ — линейный функционал, сопоставляющий многочлену его k -ю производную в точке a . Какому формальному ряду отвечает $\delta_a^{(k)}$ при изоморфизме $\mathbb{k}[x]^* \xrightarrow{\cong} k[[x]]$? Является ли множество этих функционалов линейно независимым при $a \in \mathbb{k}$ и $k \geq 0$?

Определим *спаривание* между векторными пространствами V и W отображение

$$V \times W \xrightarrow{(v,w) \mapsto \langle v, w \rangle} \mathbb{k},$$

которое линейно по каждому аргументу. Спаривание *не вырождено*, если для любого ненулевого $v \in V$ существует такой $w \in W$, что $\langle v, w \rangle \neq 0$ и то же самое для любого ненулевого $w \in W$.

Задача 9. а) Покажите, что если спаривание не вырождено, то отображение $V \xrightarrow{v \mapsto \langle v, \cdot \rangle} W^*$ является изоморфизмом.

б) Пусть $D: f \mapsto f'$ — оператор дифференцирования на $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$. Для любого ряда $g(t) \in \mathbb{k}[[t]]$ обозначим через $g(D) \in \text{End}(\mathbb{k}[x]_{\leq n})$ соответствующий дифференциальный оператор. Покажите, что операторы вида $g(D) \in \text{End}(\mathbb{k}[x]_{\leq n})$ образуют коммутативное подкольцо, изоморфное кольцу вычетов $\mathbb{k}[D]/(D^{n+1})$.

в) Определим спаривание $\mathbb{k}[D]/(D^{n+1}) \times \mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}$ формулой

$$\langle g(D), f(x) \rangle := [g(D)f](0).$$

Покажите, что это спаривание не вырождено.

г) Опишите оператор $D^*: \mathbb{k}[D]/(D^{n+1}) \rightarrow \mathbb{k}[D]/(D^{n+1})$ двойственный оператору дифференцирования $D: \mathbb{k}[x]_{\leq n} \rightarrow \mathbb{k}[x]_{\leq n}$. Опишите операторы ∇^* и Δ^* двойственные разностным операторам

$$\nabla: f(x) \mapsto f(x) - f(x-1); \quad \nabla: f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$$

на пространстве $\mathbb{k}[x]_{\leq n}$.