Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №5

Доказать следующие теоретико-множественные соотношения, используемые при доказательстве теорем о σ-кольце измеримых по Лебегу множеств и счётной аддитивности меры Лебега (предполагается, что X содержит все остальные множества):

1) $A \cup B = X \setminus [(X \setminus A) \cap (X \setminus B)]$;
2) $A \cap B = X \setminus [(X \setminus A) \cup (X \setminus B)]$;
3) $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n)$;
4) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$;
5) $A \subseteq B \cup (A \triangle B)$;
6) $A \triangle B = (X \setminus A) \triangle (X \setminus B)$;
7) $(A \cup A_2) \triangle (B \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;
8) $B_1 \cap B_2 \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$;

По аналогии с тем как это делается для меры Лебега доказать следующие основные свойства измеримых множеств по Лебегу–Стилтьесу, и меры Лебега–Стилтьеса:

9) элементарные множества измеримы;
10) $A \subseteq \cup A_n \Rightarrow \mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$ для конечных и счётных объединений;
11) A измеримо $\Leftrightarrow$ для каждого $\varepsilon > 0$ $\exists$ элементарное B, т.ч. $\mu^*(A \triangle B) < \varepsilon$;
12) объединение и пересечение конечного числа измеримых множеств измеримы;
13) разность и симметрическая разность двух измеримых множеств измеримы;
14) мера Лебега–Стилтьеса конечно-аддитивна;
15) объединение и пересечение счётного числа измеримых множеств измеримы;
16) мера Лебега–Стилтьеса счётно-аддитивна;

План лекции №5. Основные свойства измеримых по Лебегу множеств и мера Лебега. Мера Лебега–Стилтьеса.

Утверждения задач 11–16 настоящего листка доказываются для измеримых по Лебегу множеств и меры Лебега. Вводится мера Лебега–Стилтьеса на прямой.