Выпуклая геометрия II

Задача 9.1. Пусть

$$Q = \{\boldsymbol{x} \in A(V)\colon \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}\rangle + 1 \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m\} = \bigcap_{i=1}^{m} H_+(\boldsymbol{a}_i, 1)$$

— ограниченное полиэдральное множество. Скажем, что неравенство $\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x}\rangle + 1 \geqslant 0$ является *лишним*, если удаление его из системы неравенств не меняет множество Q, т. е. $Q = \bigcap_{i\neq j} H_+(\boldsymbol{a}_i, 1)$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- неравенство $\langle \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{x}\rangle + 1 \geqslant 0$ является лишним;
- $\boldsymbol{a}_j \in \operatorname{conv}(\boldsymbol{a}_i\colon i \neq j)$, т. е. точка $\boldsymbol{a}_j$ является «лишней» в записи $Q^* = \operatorname{conv}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$.

Задача 9.2. Пусть F и G — грани замкнутого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^n$, причем $F \subsetneq G$. Докажите, что $\dim F < \dim G$.

Задача 9.3. Докажите, что непустое пересечение любого набора граней замкнутого выпуклого множества является гранью. (Указание: сначала докажите утверждение для конечного набора граней, а затем воспользуйтесь предыдущей задачей.)

Задача 9.4. Докажите, что всякая грань полиэдрального множества является пересечением содержащих её гиперграней.

Задача 9.5. Докажите, что крайняя точка выпуклого многогранника является его вершиной.

Задача 9.6. Пусть C — выпуклый компакт, $\mathbf{0} \in \operatorname{int} C$. Докажите, что $\boldsymbol{x} \in C \setminus \operatorname{int} C$ тогда и только тогда, когда $H(\boldsymbol{x}, 1)$ — опорная гиперплоскость полярного множества C^*.

Задача 9.7. Пусть P — выпуклый многогранник, $\mathbf{0} \in \operatorname{int} P$. Пусть F — грань P, а F° — соответствующая грань полярного (двойственного) многогранника P^*. Докажите, что $\dim F + \dim F^\circ = \dim P - 1$.

Задача 9.8. *Выпуклым многогранным конусом* σ в пространстве V называется множество неотрицательных линейных комбинаций некоторого конечного набора векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$:

$$\sigma = \{\lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_s \boldsymbol{v}_s\colon \lambda_i \geqslant 0\}.$$

Докажите, что множество является выпуклым многогранным конусом тогда и только тогда, когда оно является пересечением конечного числа полупространств вида $H_+(\boldsymbol{u}, 0)$ (проходящих через $\mathbf{0}$).

Задача 9.9. Пусть σ — выпуклый многогранный конус. Рассмотрим множество

$$\sigma^\vee := \{\boldsymbol{u} \in V^*\colon \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \geqslant 0 \quad \text{для любого } \boldsymbol{v} \in \sigma\}.$$

Докажите, что а) $\sigma^\vee$ — выпуклый многогранный конус (он называется *двойственным* к σ);
б) $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$; в) $\dim \sigma < \dim V$ тогда и только тогда, когда $\sigma^\vee$ содержит прямую.

Задача 9.10. Пусть σ, σ' — два выпуклых многогранных конуса, причем их пересечение $\tau := \sigma \cap \sigma'$ является гранью каждого из них. Докажите, что существует такая гиперплоскость H, что $\sigma \subset H_+$, $\sigma' \subset H_-$ и $H \cap \sigma = H \cap \sigma' = \tau$.