Листок 10

Задача 10.1. Пусть $f_0 = 0$ и

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^2 - f_n(x)^2}{2}.$$

Докажите, что на отрезке $[-1, 1]$ имеет место равномерная сходимость $f_n(x) \to |x|$ при $n \to +\infty$.

Задача 10.2. Выведите из формулы $\int\limits_0^1 B_n(t)^2 dt = (-1)^{n-1} \frac{n!^2}{(2n)!} B_{2n}$ соотношение $\sup\limits_{x\in[0,1]} |B_n(x)| = O\left(\frac{n!}{(2\pi)^n}\right)$.

Задача 10.3.

а) Пусть $P_k(x) = B_k(\{x\})$ — периодический многочлен Бернулли. Докажите, что $(k+1)\int\limits_0^x P_k(t)dt = P_{k+1}(x) - B_{k+1}$.

б) Пусть $f \in C^r([M, N])$, $M < N$ — натуральные числа. Выведите из задачи 8.2 *формулу Эйлера-Маклорена*:

$$\sum_{n=M+1}^{N} f(n) = \int_M^N f(t)dt + \frac{f(N) - f(M)}{2} + \sum_{k=2}^{r} \frac{B_k}{k!}(f^{(k-1)}(N) - f^{(k-1)}(M)) + R_r,$$

причём

$$|R_r| \leq \frac{C}{(2\pi)^r} \int_M^N |f^{(r)}(t)|dt.$$

для некоторой абсолютной постоянной C.

Задача 10.4. Найдите асимптотическое разложение для

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} - \frac{\pi^2}{6}.$$

Задача 10.5.

а) Разложите функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x < \varepsilon \\ 0 \text{ иначе} \end{cases}$$

В ряд Фурье на отрезке $[0, 1]$. Заключите, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi n \varepsilon)}{\pi^2 n^2} = \frac{\varepsilon - \varepsilon^2}{2}.$$

б) Устремив $\varepsilon \to 0$, вычислите

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

Задача 10.6. Найдите пределы

а)
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$$

б)
$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/4} \int_{-1}^{1} (1-x^4)^n dx.$$

Задача 10.7. Пусть $\mathbb{T}$ — единичная окружность в $\mathbb{C}$, а $\mathcal{A}$ — алгебра непрерывных функций вида
$$f(e^{i\varphi}) = a_0 + a_1 e^{i\varphi} + \ldots + a_n e^{in\varphi}.$$

Докажите, что это унитальная алгебра, разделяющая точки, но $\mathcal{A}$ не плотна в алгебре $C(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ комплекснозначных непрерывных функций на $\mathbb{T}$.