Листок 6

Задача 6.1. Пусть $a_n \geq 0$ — невозрастающая последовательность. Докажите, что ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum 2^k a_{2^k}$.

Задача 6.2. Для каких α сходятся ряды?
а) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ б) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^\alpha}$

Задача 6.3. Найдите

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\operatorname{sh}(x)) - \operatorname{sh}(\sin(x))}{x^7}$$

Задача 6.4. а) Пусть $y > 0$. Докажите, что многочлен $x^5 + xy - 1$ имеет ровно один вещественный корень. Сколько корней может быть для произвольного y?
б) Обозначим этот корень через $f(y)$. Найдите асимптотику $f(y) - \frac{1}{y}$ при $y \to +\infty$.

Задача 6.5. Пусть $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на отрезке I, причем $f(y) = 0, f'(y) \neq 0$ для некоторого $y \in I$. Докажите, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует константа $1 > C > 0$ такая, что последовательность

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

с условием $|x_0 - y| < \varepsilon$ удовлетворяет неравенству $|x_n - y| \leq C^{2^n}$

Задача 6.6. Может ли компактное метрическое пространство содержать свою изометрическую копию? Иными словами, может ли для метрического компакта K существовать отображение $f : K \to K$ такое, что f — небиективная изометрия?

Задача 6.7. Пусть $p \neq q$ — простые числа. Докажите, что $|x-y|_p + |x-y|_q$ — метрика на $\mathbb{Z}$ и опишите делители нуля в $\mathbb{Z}_{pq}$ — пополнении $\mathbb{Z}$ по этой метрике.

Задача 6.8. Для нормированного пространства X обозначим через X^* пространство всех ограниченных линейных функционалов на X, то есть всех линейных отображений $f : X \to \mathbb{R}$, для которых существует C такое, что $|f(x)| \leq C||x||$ для всех x. Введём на X^* норму $||f|| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{||x||}$. Докажите, что X^* — банахово пространство.

Задача 6.9. При $1 \leq p, q \leq \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ установите изометрический изоморфизм $(\ell^p_n)^* \cong \ell^q_n$.

Задача 6.10. Пусть ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ сходится. Докажите, что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \lim_{x \to 1-0} A(x),$$

где $A(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ и, как следствие, найдите суммы

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{ и } \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$