ТОПОЛОГИЯ–1
ЛИСТОЧЕК 2: МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

ЛЕКТОР: Г. С. ЧЕРНЫХ

Напомним, что *метрическим пространством* называется множество X, снабжённое *метрикой* (или *расстоянием*), то есть, такой функцией $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, что выполнены следующие свойства:

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2) $d(x,y) = d(y,x)$;
3) $d(x,y) + d(y,z) \geqslant d(x,z)$ (*неравенство треугольника*).

Тогда на X возникает топология, задаваемая базой, состоящей из всевозможных открытых шаров $B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ (легко проверить, что множество шаров удовлетворяет аксиомам базы из задачи 4 а) первого листочка).

Топологическое пространство (X, τ) называется *метризуемым*, если существует метрика на X, задающая топологию τ.

Отображение между метрическими пространствами называется *изометрическим*, если оно сохраняет расстояние между точками.

1. Докажите, что дискретная топология всегда метризуема. Когда метризуема антидискретная топология?

2. а) Докажите, что если X — метризуемое пространство, а Y — топологическое пространство, то отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ выполнено $f(x_n) \to f(x)$. В частности, две метрики d_1 и d_2 определяют одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда $x_n \to x$ в метрике $d_1 \Leftrightarrow x_n \to x$ в метрике d_2 (для любой последовательности x_n).

б) Приведите пример топологического пространства X, для которого неверно, что отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно в точке $x \in X$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности $x_n \to x$ выполнено $f(x_n) \to f(x)$.

3. Приведите пример метрического пространства и двух шаров в нём, таких что шар большего радиуса содержится в шаре меньшего радиуса.

4. Метрика d называется *неархимедовой* (или *ультраметрикой*), если $d(x,z) \leqslant \max(d(x,y), d(y,z))$. Проверьте, что метрика неархимедова $\Leftrightarrow$ для любого замкнутого шара $\overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leqslant r\}$ любая его точка является его «центром», то есть, для любой $y \in \overline{B}(x,r)$ выполнено $\overline{B}(x,r) = \overline{B}(y,r)$. Верно ли это для открытых шаров? Приведите пример неархимедовой метрики.

5. Приведите пример метрического пространства (X,d) и открытого шара $B(x,r)$ в нём, замыкание которого $\overline{B(x,r)}$ не равно замкнутому шару $\overline{B}(x,r)$ с тем же центром и того же радиуса. Выполнено ли между $\overline{B}(x,r)$ и $\overline{B(x,r)}$ какое-нибудь включение? Что будет, если рассмотреть внутренность замкнутого шара и соответствующий открытый шар?

6. Проверьте, что если две метрики d_1 и d_2 на множестве X *метрически (или липшицево) эквивалентны*, то есть, если существуют такие положительные константы $C_1, C_2 > 0$, что $C_1 d_1 \leq d_2 \leq C_2 d_1$, то определяемые этими метриками топологии на X совпадают. Верно ли обратное?

7. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $f(0) = 0$;
(2) f (нестрого) возрастает;
(3) $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Докажите, что тогда для любой метрики d функция $f \circ d$ также является метрикой, причём, если f непрерывна и строго монотонна в окрестности нуля, то эти метрики определяют одинаковые топологии. В частности, докажите, что функции $\frac{d}{1+d}$ и $\min(d, 1)$ являются метриками, причём определяют ту же топологию, что и d.

Таким образом, для любой метрики d задаваемую ей топологию можно также задать с помощью метрики d' т.ч. $d' \leqslant 1$. Иными словами, любое метрическое пространство гомеоморфно ограниченному метрическому пространству.

8. а) Рассмотрим два метрических пространства (X_1, d_1) и (X_2, d_2). Докажите, что функции $\sqrt[p]{(d_1)^p + (d_2)^p}$ при $p \geqslant 1$ и $\max(d_1, d_2)$ являются метриками на произведении $X_1 \times X_2$, причём они определяют одну и ту же топологию, совпадающую с топологией произведения. Эта процедура даёт много эквивалентных метрик на $\mathbb{R}^n$.

б) Является ли функция $d_p((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt[p]{(x_1 - x_2)^p + (y_1 - y_2)^p}$ метрикой на $\mathbb{R}^2$ при $0 < p < 1$?

9. Фиксируем простое число p. Рассмотрим на множестве ненулевых целых чисел $\mathbb{Z} - 0$ функцию $||a||_p = \max\{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ т.ч. a делится на $p^k\}$. Продолжим её на ненулевые рациональные числа $\mathbb{Q} - 0$ по формуле $||\frac{a}{b}||_p = ||a||_p - ||b||_p$. Рассмотрим вещественное число $c > 1$. Определим *p-адическую норму* на $\mathbb{Q}$ по формуле $|x|_p = c^{-||x||_p}$ для $x \neq 0$ и $|0|_p = 0$. Докажите, что

(1) функция $|x - y|_p$ является неархимедовой метрикой на $\mathbb{Q}$;
(2) топология, определяемая ей, не зависит от выбора числа $c > 1$;
(3) полученные так топологии различны для всех простых p и отличаются от стандартной топологии на $\mathbb{Q}$.

Является ли подмножество $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ограниченным относительно p-адической метрики? Является ли оно замкнутым?

10. Докажите, что на конечномерном векторном пространстве любые две нормы липшицево эквивалентны. Верно ли это для любых двух метрик?

11. а) Докажите, что дизъюнктное объединение $\bigsqcup X_\alpha$ метризуемо $\Leftrightarrow$ все X_α метризуемы.

б) Докажите, что произведение $\prod X_\alpha$ не более чем счётного числа метрических пространств метризуемо.

в) Докажите, что произведение $\prod X_\alpha$ более чем счётного числа метрических пространств (состоящих более чем из одной точки) неметризуемо.

В частности, для несчётного множества X и метрического пространства Y неметризуемо пространство Y^X всех отображений из X в Y с топологией поточечной сходимости.

г) Докажите, что для несчётного метрического пространства X пространство $C_p(X, \mathbb{R})$ непрерывных функций с топологией поточечной сходимости также неметризуемо.

12. Пространство удовлетворяет *второй аксиоме счётности*, если его топология обладает счётной базой. Пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует счётное всюду плотное подмножество. Докажите, что

а) из второй аксиомы счётности в любом топологическом пространстве всегда следует сепарабельность;

б) для метрических пространств из сепарабельности следует вторая аксиома счётности.

13. Докажите, что в сепарабельном метрическом пространстве дискретное подмножество не может быть более чем счётным.

14. Рассмотрим для подмножества A метрического пространства (X, d) функцию расстояния до A: $d_A(x) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$. Докажите, что эта функция непрерывна и $\overline{A} = \{x \in X \mid d_A(x) = 0\}$.

15. Для двух ограниченных подмножеств A и B метрического пространства (X, d) рассмотрим число $d(A, B) = \max\{\sup\limits_{a \in A} d_B(a), \sup\limits_{b \in B} d_A(b)\}$. Докажите, что это метрика на множестве замкнутых ограниченных подмножеств пространства X. Она называется *метрикой Хаусдорфа*. Зачем здесь условия ограниченности и замкнутости?

Последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства (X, d) называется *фундаментальной (или последовательностью Коши, или сходящейся в себе последовательностью)*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ т.ч. $\forall n, m \geqslant N$ выполнено $d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$. Докажите, что любая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

Метрическое пространство называется *полным*, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Также в этом случае говорят, что метрика d является полной. Пример полного пространства — $\mathbb{R}$.

16. а) Приведите пример неполного метрического пространства.

б) Докажите, что подпространство полного пространства полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

Топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми подмножествами $X = \bigcup U_\alpha$ можно выбрать конечное число подмножеств $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$, которые его также покрывают $X = \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$.

При непрерывных отображениях образ компактного пространства всегда компактен.

17. а) Докажите, что в любом метрическом пространстве любое компактное подпространство ограничено.

В частности, любые непрерывные отображения из компактного пространства в метрическое пространство всегда ограничены.

б) Докажите, что подпространство Y полного пространства X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и *вполне ограниченно*, то есть, $\forall \varepsilon > 0$ пространство Y можно покрыть конечным числом шаров радиуса ε. Верно ли это для неполных метрических пространств?

18. Докажите, что метрическое пространство является полным, если в нём компактны все замкнутые шары. В частности, все компактные метрические пространства полны.

19. Докажите, что в метрическом пространстве компактные подпространства совпадают с замкнутыми и ограниченными тогда и только тогда, когда компактны все замкнутые шары.

20. Полно ли пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с p-адической метрикой из задачи 9? Является ли подмножество $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ компактным?

21. Приведите пример двух метрик на множестве X, одна из которых полная, а другая нет, но которые определяют одну и ту же топологию на X. Иными словами, приведите пример двух гомеоморфных метрических пространств, одно из которых полно, а другое — нет. В частности, отсюда следует, что полнота не является топологическим свойством. Могут ли эти метрики быть метрически эквивалентными?

22. Докажите, что пересечение счётного числа открытых всюду плотных подмножеств в полном метрическом пространстве является всюду плотным. Является ли оно обязательно открытым? Можно ли опустить условие счётности, открытости или полноты?

23. Докажите, что для метрических пространств X и Y их произведение $X \times Y$ (с любой из метрик из задачи 8) полно тогда и только тогда, когда полны X и Y.

24. Отображение $f\colon X \to X$ метрического пространства (X, d) в себя называется *сжимающим*, если существует такая константа $0 \leqslant k < 1$, что $d(f(x), f(y)) < k\, d(x, y)$.

а) Докажите, что в полном пространстве любое сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку: $f(x) = x$. Верно ли это для неполных пространств? Верно ли это для отображений, удовлетворяющих $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$?

б) Докажите, что условия $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ достаточно для компактного пространства X.

25. а) Докажите, что для множества X и полного пространства (Y, d_Y) метрика $d(f, g) = \sup\limits_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ на множестве $B(X, Y)$ ограниченных отображений из X в Y является полной. Верно ли это для неполного Y?

б) Докажите, что если теперь X является топологическим пространством, то подмножество $C_b(X, Y) \subset B(X, Y)$ ограниченных непрерывных отображений является замкнутым. В частности, оно полно. Например, для компактного пространства K и полного Y пространство всех непрерывных отображений $C(K, Y)$ полно. Верно ли это для неполного Y?

26. Для метрических пространств X и Y изометрическое вложение $X \hookrightarrow Y$ (то есть, сохраняющее расстояния между точками) называется *пополнением* пространства X, если Y полно, а образ X всюду плотен в Y. Пример: $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ — пополнение $\mathbb{Q}$.

Оказывается, для любого метрического пространства (X, d) существует пополнение. Для этого достаточно просто изометрично вложить X в полное пространство, так как в этом случае замыкание образа будет служить пополнением. Ниже предлагается одна из конструкций такого вложения.

Докажите, что для любой фиксированной точки $x_0 \in X$ отображение $X \to B(X, \mathbb{R})$, $x \mapsto d_{x,x_0}$, где $d_{x,x_0}(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$, корректно определено (то есть, функции d_{x,x_0} действительно ограничены на X) и является изометрическим вложением. Так как пространство $B(X; \mathbb{R})$ полно, это даёт конструкцию пополнения X.

27. Докажите, что для пополнения $X \hookrightarrow Y$ любое изометрическое вложение $X \hookrightarrow Z$ в полное пространство Z единственным образом продолжается до изометрического вложения $Y \hookrightarrow Z$. В частности, выведите отсюда, что пополнение $X \hookrightarrow Y$ определено однозначно с точностью до изометрической биекции, тождественной на X.

Верно ли это для изометрических вложений в не обязательно полные метрические пространства? Верно ли, что любое непрерывное отображение в полное пространство продолжается до непрерывного отображения пополнения? Если продолжение непрерывного отображения существует, всегда ли оно единственно? Всегда ли продолжение топологического вложения (если существует) будет топологическим вложением?

28. Докажите, что метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно полно и вполне ограниченно.

29. а) Докажите, что если метрическое пространство X компактно, то для любого открытого покрытия $X = \bigcup U_\alpha$ существует такое число $\varepsilon > 0$, что любой шар в X радиуса ε целиком лежит в некотором элементе покрытия.

б) Докажите, что метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда для любой последовательности точек $x_n \in X$ существует сходящаяся подпоследовательность x_{n_k}.

30. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^\infty$ последовательностей вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots)$, для которых, начиная с некоторого номера, выполнено $x_n = 0$ (так называемых *финитных* последовательностей). Рассмотрим на $\mathbb{R}^\infty$ следующие метрики $d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p}$ для $p \geqslant 1$ и $d_\infty(x,y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$. Докажите, что пополнением пространства $(\mathbb{R}^\infty, d_p)$ является естественное вложение в пространство $\ell^p = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$ с метрикой $d_p(x,y) = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p}$ (для $p = \infty$: $\ell^\infty = \{(x_1, x_2, \ldots) \mid \sup\limits_i |x_i| < \infty\}$ — множество ограниченных последовательностей с метрикой $d_\infty(x,y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$).

31. Докажите, что в следующих (полных) метрических пространствах единичные замкнутые шары с центром в нуле не являются компактными:

(1) $C([0;1];\mathbb{R})$ с $d(f,g) = \max\limits_{x\in[0;1]} |f(x) - g(x)|$;

(2) ℓ^p при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.