5. Лекция 5. Простые, полкпростые, нильпотентные и разрешимые алгебры Ли. Теоремы Энгеля и Ли.

Все алгебры Ли в этой лекции конечномерные и над полем $\mathbb{C}$.

5.1. **Основные определения и примеры.**

Определение 5.1. Алгебра Ли называется простой, если она не содержит нетривиальных идеалов.

Определение 5.2. Группа Ли называется простой, если её алгебра Ли проста.

Замечание 5.3. В соответствии с первой теоремой Ли, группа Ли простая, если она не содержит нетривиальных нормальных связных виртуальных подгрупп Ли.

Определение 5.4. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Определим $\mathfrak{g}^{(i)} = [\mathfrak{g}^{(i-1)}, \mathfrak{g}^{(i-1)}]$. Алгебра Ли называется разрешимой, если существует такое n, что $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$.

Примеры. Алгебра Ли $\mathfrak{b}_+$ нестрого верхнетреугольных матриц разрешима.

Замечание 5.5. Алгебра Ли разрешима, если она получается последоватльностью расширений с помощью абелевых алгебр Ли.

Определение 5.6. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Определим $\mathfrak{g}_{(i)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(i-1)}]$. Алгебра Ли называется нильпотентной, если существует такое n, что $\mathfrak{g}_{(n)} = 0$.

Примеры. Алгебра Ли $\mathfrak{n}_+$ строго верхнетреугольных матриц нильпотента.

Ясно, что разрешимая алгебра нильпотента, обратное неверно (см. пример разрешимой алгебры).

Замечание 5.7. Алгебра Ли разрешима, если она получается последоватльностью центральных расширений с помощью абелевых алгебр Ли.

Предложение 5.8.
1. Подалгебры и гомоморфные образы разрешимых (нильпотентных) алгебр разрешимы (нильпотентны).
2. Если $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ разрешимый идеал и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешима, то $\mathfrak{g}$ – разрешима.
3. Если $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ нильпотентна, то $\mathfrak{g}$ – нильпотентна.
4. Если I, J – разрешимые идеалы, то $I + J$ – тоже разрешимы идеал.

Пункт 4) предложения показывает, что любая алгебра Ли содержит максимальный разрешимый идеал (сумма всех разрешимых).

Определение 5.9. Радикал алгебры Ли $Rad(\mathfrak{g})$ это её максимальный разрешимый идеал.

Определение 5.10. Алгебра Ли называется полупростой, если $Rad(\mathfrak{g}) = 0$.

В частности, любая простая алгебра Ли полупроста.

5.2. **Теорема Энгеля.**

Если $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, то $\forall\ x \in \mathfrak{g}$ существует n такое, что $(\operatorname{ad} x)^n = 0$. Оказывается, верно и обратное.

Лемма 5.11. Если $x \in \mathfrak{gl}(V)$ – нильпотент, то $\operatorname{ad} x$ – нильпотентный оператор.

Предложение 5.12. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ – подалгебра Ли, причём любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ является нильпотентным оператором. Тогда $\exists\ v \in V$ такой, что $xv = 0\ \forall\ x \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Хамфрис, п. 3.3. □

Теорема 5.13 (Теорема Энгеля)**.** Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли и $\forall\ x \in \mathfrak{g}$ оператор $\operatorname{ad} x$ нильпотентный. Тогда $\mathfrak{g}$ – нильпотентна.

Доказательство. Рассмотрим $\mathrm{ad} : \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g}))$. Это точное представление и любой элемент в образе нильпотент. По предположению выше это означает, что существует общий собственный вектор v для всех $x \in \operatorname{Im} \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$. Рассмотрим $V/\operatorname{span} v$. Образ алгебры $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ в этом представлении тоже состоит из нильпотентных оперторов, значит тоже содержит общий собственный вектор и т.д. Это означает, что $\operatorname{Im} \mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ в некотором базисе представлеяется строго верхнетреугольными матрицами, а значит $\mathfrak{g}\ Z(\mathfrak{g})$ – нильпотентная алгебра. Отсюда следует, что $\mathfrak{g}$ – нильпотентна. □

Замечание 5.14. Если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ – нильпотентная алгебра Ли, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{gl}(V)$.

5.3. **Теорема Ли.**

Предложение 5.15. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ – разрешимая алгебра Ли. Тогда существует общий собственный вектор для всех $x \in \mathfrak{g}$.

Доказательство. Хамфрис, п. 4.1. □

Теорема 5.16 (Теорема Ли)**.** Если $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ –разрешимая алгебра Ли, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{b}_+ \subset \mathfrak{gl}(V)$.

Доказательство. Выберем общий собственный вектор и воспользуемся предположением индукции. □

Следствие 5.17. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда когда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна.

Доказательство. Заметим, что $\mathfrak{g}^{(i)} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{(i-1)}$ откуда следует, что нильпотентность $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ влечёт разрешимость $\mathfrak{g}$.

Обратно, если $\mathfrak{g}$ разрешима, то $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ – разрешима, а значит представляется врехнетреугольными матрицами в некотором базисе, откуда $[\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}, \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}] = \mathrm{ad}[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ представляется строго верхнетреугольными матрицами, то есть состоит из нильпотентных элементов. По теореме Энгеля $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ нильпотентна. □