Листок 6
ВОКРУГ НЕРАВЕНСТВА ПЕНРОУЗА

1. Используя сильный принцип сравнения для средней кривизны, докажите, что горизонт многообразия Шварцшильда является горизонтом видимости.

2. Изучите «доказательство» теоремы 3.14 в книге D.Lee. Geometric Relativity и дайте её строгое доказательство. Эта теорема утверждает, что АДМ-массу конца M_k асимптотически плоского многообразия (M^n, g) можно вычислить как

$$m_{ADM}(M_k, g) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{-1}{(n-1)(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\Sigma_i} G(X, \nu_\delta) ds_\delta,$$

где G – тензор Эйнштейна, X – поле $x^j \partial_j$ на M_k в асимптотически плоской карте конца, $(\Sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – всякая исчерпывающая M_k последовательность в том смысле, что множества $(\Omega_i)_{i \in \mathbb{N}}$ с $\partial\Omega_i = \Sigma_i$ исчерпывают M_k и $|\Sigma_i| \leq C \left(\inf_{x \in \Sigma_i} |x| \right)^{n-1}$, где константа $C > 0$ не зависит от i .

3. Пусть (M^3, g) – асимптотически плоское многообразие. Пусть S_ρ – координатные сферы радиуса ρ в асимптотически плоской карте данного конца M_k . Докажите, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} m_H(S_\rho) = m_{ADM}(M_k, g).$$

4. Докажите неравенство Уиллмора: пусть Σ – ориентируемая погруженная замкнутая поверхность в $\mathbb{E}^3$. Тогда

$$\int_{\Sigma} H^2 ds_\delta \geq 16\pi.$$

5. Докажите, что равенство в неравенстве Уиллмора достигается тогда и только тогда, когда Σ – круглая сфера.

6. Пусть дана гладкая функция u на римановом многообразии (M, g) . Предположим, что $\nabla^g u$ нигде не обращается в ноль. Докажите, что u является решением потока обратной средней кривизны (ПОСК) тогда и только тогда, когда она – слабое решение ПОСК.

7. Докажите, что функция $u = (n-1) \ln |x|$ является решением ПОСК на $\mathbb{E}^n \setminus \{0\}$.