6. Лекция 6. Системы линейных уравнений и векторные пространства.

6.1. **Системы линейных уравнений.**

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

и найдём её общее решение *методом Гаусса.* Для этого будем использовать следующие виды *элементарных преобразований* –

- Вычесть из одного уравнения другое умноженное на число.
- Переставить уравнения.
- Умножить уравнение на ненулевое число.

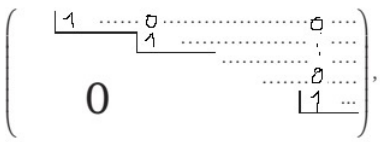
Легко видеть, что система уравнений, полученная из исходной преобразованиями строк эквивалентна исходной (то есть множества решений исходной и преобразованной систем совпадают).

Более того, будем представлять систему уравнений в виде *матрицы* с m строками и $n+1$ столбцами:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Тогда преобразования системы это тоже самое что преобразования матрицы.

Предложение 6.1. Элементарными преобразованиями можно привести любую матрицу к верхнетреугольному виду с ведущими единицами:



Доказательство. Найдём первый ненулевой столбец и в нем первый ненулевой элемент. Переставим, если нужно, его в первую строку. Преобразованием первого типа занулим все элементы ниже. Продолжим эту процедуру: найдём первый столбец, в котором есть ненулевой элемент не в первой строке, переставим его (если нужно) со второй строкой и занулим все элементы в соответствующем столбце и так далее. □

Назовём переменные, отвечающие номерам столбцов с единичками главными, а остальные – свободными. Тогда все главные переменные можно выразить через свободные и с точностью до перенумерации общее решение имеет вид:

Заметим, что набор $(c_1, \ldots, c_k, 0, \ldots, 0)$ является решением частным решением исходной системы, а ... – общим решением однородной системы. Более того, ясно, что разность любых двух решений является некоторым решением однородного уравнения, поэтому

Предложение 6.2. Произвольное решение неоднородной системы это сумма общего решения однородной системы и (произвольного) частного решения неоднородной системы.

При этом отметим, что для однородного уравнения если x и y – решения, то $x+y$ и λx для любого $\lambda \in \Bbbk$ – тоже решение. Таким образом

Предложение 6.3. Набор решений однородной системы линейных уравнений образует векторное пространство, см. ниже.

В конце отметим, что из вышеприведённых рассуждений не ясно, однозначно ли определено количество свободных переменных в решении, и верно ли, что любые два решения для различных значений свободных переменных различны. Ответ на оба вопросы утвердительный и будет дан позже.

6.2. **Векторные пространства.**

Определение 6.4. Векторное пространство над полем $\Bbbk$ это абелева группа $(V, +)$ с *бесконечным* набором одноместных операций $\cdot\lambda : V \to V, \lambda \in \Bbbk$, удовлетворяющий следующим аксиомам:

(1) $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;
(2) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;
(3) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
(4) $1 \cdot v = v$.

Определение 6.5. Линейное отображение (гомоморфизм) векторных пространств U, V над полем $\Bbbk$ – это отображение $f : U \to V$ такое, что

$$f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \quad \forall\, u_1, u_2 \in U$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall\, u \in U, \lambda \in \Bbbk$$

Определение 6.6. Изоморфизм векторных пространств – это биективное линейное отображение.

Определение 6.7. Векторное подпространство $U \subset V$ это подмножество V замкнутое относительно сложения и умножения на скаляры.

Примеры.
(1) Пространство решений системы однородных линейных уравнений – векторное пространство.
(2) Геометрические вектора на плоскости и в пространстве ("классы эквивалентности направленных отрезков").
(3) $\Bbbk^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \Bbbk\}$ с поточечными операциями сложения и умножения.
(4) Расширение поля $\mathbb{L} \supset \Bbbk$ – векторное пространство над $\Bbbk$.
(5) X – произвольное множество. Тогда $Fun(X; \Bbbk) = \{f : X \to \Bbbk\}$ – векторное пространство над полем $\Bbbk$. В случае конечного множества $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ порядка имеем

$$Fun(X; \Bbbk) \simeq \Bbbk^n, f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)).$$

(6) $\Bbbk[x], \Bbbk[[x]]$ – векторные пространства.

6.3. **Теорема о базисе.** Наша первая задача – классифицировать векторные пространства.

Пусть $\{v_i\}_{i\in I}$ – набор векторов векторного пространства V. Обозначим через

$$\langle\{v_i\}_{i\in I}\rangle = \{c_1 v_{i_1} + \ldots + c_k v_{i_k} \,|\, c_i \in \Bbbk, i_1, \ldots, i_k \in I, k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

линейную оболочку набора векторов. Ясно, что $\{v_i\}_{i\in I}$ является векторным подпространством V. Набор $\{v_i\}_{i\in I}$ называется порождающим, если $V = \langle\{v_i\}_{i\in I}\rangle$.

Определение 6.8. Векторное пространство V называется конечнопорождённым, если существует конечный набор $v_1, \ldots, v_n \in V$ такой, что

$$V = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$$

Определение 6.9. Набор $\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ называется линейно-независимым (ЛнеЗ), если для любого $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ и любого набора $v_1, \ldots, v_k \in V$ из равенства

$$c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = 0$$

следует, что $c_1 = \ldots = c_k = 0$.

Определение 6.10. Набор $\{v_i\}_{i\in I}$ называется базисом векторного пространства, если любой $v \in V$ единственным образом выражается в виде

$$v = c_1v_1 + \ldots + c_kv_k$$

для некоторых $\{v_1, \ldots, v_n\} \in \{v_i\}_{i\in I}$.

Предложение 6.11. Набор векторов является базисом векторного пространства тогда и только тогда когда порождающий и ЛнеЗ.

Предложение 6.12. Пусть $v_1, \ldots, v_k$ – порождающий набор векторного пространства, а $e_1, \ldots, e_n$ – линейно независимый. Тогда $n \leq k$ и можно некоторые n векторов набора $v_1, \ldots, v_k$ так, что набор останется порождающим.

Теорема 6.13.
(1) Любое конечнопрождённое векторное пространство обладает базисом.
(2) Любые два базиса равномощны.
(3) Базис любого подпространства можно дополнить до базиса всего пространства.

Доказательство. 1) Если набор ЛЗ, выкинем из него вектор, которые выражаются через остальные и рано или поздно получим ЛнеЗ порождающий набор, то есть базис.
2) Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $v_1, \ldots, v_m$ – два базиса. Тогда по предложению 6.12 $n \geq m$ и $m \geq n$, значит, $m = n$. □

3) Выберем базис подпространства и базис пространства и применим предложение 6.12

Теорема 6.14.
(1) Любое векторное пространство обладает базисом.
(2) Любые два базиса равномощны.
(3) Базис любого подпространства можно дополнить до базиса всего пространства.

Доказательство. 1) Рассмотрим множество всех ЛнеЗ наборов в векторном пространстве V. Заметим, что объединение ЛнеЗ наборов – ЛнеЗ набор, значит, по лемме Цорна, существует максимальный ЛнеЗ набор. Он, очевидно, и будет базисом.
2) Пусть $B, E \subset V$ два базиса разной мощности и $|B| > |E|$. Выразим каждый вектор из E через элементы B и для каждого $e \in E$ обозначим через B_e (конечное) подмножество элементов B, участвующих в разложении e. Тогда множество $\bigcup_{e\in E} B_e$ равномощно E. Действительно, очевидно, что $|E| \leq |B_E|$, иначе $\bigcup_{e\in E} B_e$ – базис меньшей мощности чем E.

С другой стороны B_E вкладывается в $\mathbb{N} \times E$: Если $b \in B_e$ и $e = c_1b_1 + \ldots + c_nb_n$ (фиксируем порядок в каждом разложении) и $b_i = b$, то $b \mapsto (i, e)$. При этом для каждого $b \in B_E$ выберем ровно одно B_e, которому оно принадлежит. Наконец, $|\mathbb{N}\times E| \leq |E \times E| = |E|$. Отсюда $|B_E| = |E|$.

Выберем $b \in B\setminus\bigcup_{e\in E} B_e$. Но $\bigcup_{e\in E} B_e$ уже порождает V, а значит b выражается через некоторые другие элементы B с ненулевыми коэффициентами, что противоречит тому, что B является базисом.

3) Применим рассмотрение пункта 1, добавив свойство, что эти наборы содержат заданный базис подпространства, получим требуемое.

□

Определение 6.15. Размерность векторного пространства V это мощность его базиса. Векторное пространство называется конечномерным, если $\dim V < \infty$.

Отметим, что выбор базиса конечномерного векторного пространства V задаёт изоморфизм между V и $\Bbbk^n$: обозначим стандартный базис пространства $\Bbbk^n$ через e_i, тогда $v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$, то $v \mapsto a_1e_1 + \ldots + a_ne_n$.

6.4. **Линейные преобразования.** Пространство линейных отображений $Hom(U, V)$ между векторными пространствами U, V само является векторным пространством. Более того, предположим, что $\dim U, \dim V < \infty$. Тогда выбор базисов $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_m)$ векторных пространств U и V соответственно позволяет определить однозначно линейное отображение $\mathcal{A}$ набором nm чисел.

Действительно, если $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$, то

$$F(u_i) = F\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i F(u_i),$$

$$F(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j$$

то набор чисел (a_{ij}) однозначно определяет линейное отображение.

Запишем координаты образов базисных векторов пространства U в столбцы таблицы чисел $m \times n$. Получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах u и v. Отметим, что матрица зависит от выбора базиса.

Множество матриц $M_{mn}(\Bbbk)$ – это векторное пространство $\Bbbk^{mn}$. Выбор базисов векторных пространств U, V задаёт изоморфизм векторных пространств

$$Hom(U, V) \to Mat_{mn}(\Bbbk)$$

при этом линейные отображения вида $f_{ij} : u_i \mapsto v_j$, а все остальные базисные вектора в 0 образуют базис $Hom(U, V)$ и отображаются при изоморфизме в матрицы E_{ij}, которая состоит из нулей и единицы на (i, j)-месте.

Заметим также, что выбор базиса позволяет задавать линейное отображение отправляя базисные вектора в произвольные.