Анализ-2 НМУ, февраль-май 2025 гг.

Листок №4

1) Доказать, что два определения кольца эквивалентны:

- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$;
- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$

и

- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \triangle B \in \mathcal{R}$;
- $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$,

где $\triangle$ обозначает симметрическую разность;

2) σ-кольца замкнуты относительно счётного пересечения входящих в них множеств;

3) пусть функция множеств ϕ аддитивна, то есть $(A \cap B = \varnothing) \Rightarrow (\phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B))$. Тогда

1) $\phi(\varnothing) = 0$;
2) $\phi(A \cup B) + \phi(A \cap B) = \phi(A) + \phi(B)$;
3) $B \subset A \Rightarrow \phi(A \setminus B) = \phi(A) - \phi(B)$;

4) если A – элементарное множество, $\{A_n\}$ – конечная или счётная система элементарных множеств, и $A \subseteq \cup A_n$, то $S(A) \le \sum S(A_n)$, где S – площадь;

5) пусть A – открытое множество. Тогда $\mu_*(A) = \sup \sum S(P_n)$ по всем конечным или счётным дизъюнктным системам прямоугольников $\{P_n\}$, таким что $A \supseteq \cup P_n$.

План лекции №4. Общая теория меры. Мера Лебега.

σ-кольца и измеримые пространства. Мера Лебега. Измеримые по Лебегу множества образуют σ-кольцо (подготовительные теоремы).