

Степень отображения сферы в себя

- ▷ Пусть $n > 0$. Мы знаем, что $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Значит, для отображения $f : S^n \rightarrow S^n$ гомоморфизм $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ — это умножение на некоторое число $\deg f \in \mathbb{Z}$. Его называют *степенью* f .
- ▷ На самом деле, $\deg f = \deg g \iff f \sim g$ (потому что $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \cdot [\text{id}]$). Этим пользоваться нельзя!

Задача 4.1. Докажите свойства степени: а) $\deg \text{id} = 1$;

б) $\deg f = 0$, если f не сюръективно;

в) $\deg f = \deg g$, если $f \sim g$;

г) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$;

д) $\deg r = -1$, где $r : S^n \rightarrow S^n$ — отражение относительно гиперплоскости;

е) $\deg a = (-1)^{n+1}$, где $a(\vec{x}) = -\vec{x}$.

Задача 4.2 (теорема Брауэра, 1911). Любое $g : D^{n+1} \rightarrow D^{n+1}$ имеет неподвижную точку.

- ▷ Указание: рассмотрите пересечение S^n и луча, который начинается в $g(x)$ и проходит через x .

Задача 4.3. а) Любое $f : S^n \rightarrow S^n$ гомотопн отображению, имеющему неподвижную точку.

б) Если $f : S^n \rightarrow S^n$ не имеет неподвижных точек, то $\deg f = (-1)^{n+1}$.

Задача 4.4. Докажите, что существует отображение $S^n \rightarrow S^n$ любой степени.

Задача 4.5. а) Постройте отображение $c : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ “степени $(1, 1)$ ” (отмечена точка $(1, 0, \dots, 0)$).

б) Дан гомоморфизм $A : \mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^\ell$. Постройте $g : \underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_k \rightarrow \underbrace{S^n \vee \dots \vee S^n}_\ell$ такое, что $g_* = A$.

- ▷ *Действие* группы G на топологическом пространстве X — это набор непрерывных отображений $\{\alpha_g : X \rightarrow X\}_{g \in G}$ такой, что $\alpha_e = \text{id}$, $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{g \cdot h}$. Действие называется *свободным*, если $\alpha_g(x) \neq x$ для любого $x \in X$ и любого $g \neq e$.

Задача 4.6. Постройте свободное действие $\mathbb{Z}/m$ на S^{2k+1} .

Задача 4.7. Пусть группа G действует на S^{2k} свободно. Докажите, что $G = \mathbb{Z}/2$ или $G = \{e\}$.

Задача 4.8. а) Докажите, что любое отображение $\mathbb{R}P^{2k} \rightarrow \mathbb{R}P^{2k}$ имеет неподвижную точку.

(Сведите к отображению сфер с помощью теории накрытий.)

б) Постройте отображение $\mathbb{R}P^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{2k+1}$ без неподвижных точек.

Задача 4.9. Пусть $f : S^n \rightarrow S^n$, $x \in S^n$, причём $f^{-1}(x)$ — конечное подмножество.

а) Докажите, что $H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{x\})$ — изоморфизм.

б) Для точки $y \in f^{-1}(x)$ выберем окрестность $U \subset S^n$ так, что $U \cap f^{-1}(x) = \{y\}$. Докажите, что следующее отображение не зависит от выбора U :

$$\mathbb{Z} \cong H_n(S^n) \xrightarrow{\simeq} H_n(S^n, S^n \setminus \{y\}) \xleftarrow{\simeq} H_n(U, U \setminus \{y\}) \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n \setminus \{x\}) \xleftarrow{\simeq} H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}.$$

(Это отображение — умножение на некоторое число $\deg_y(f)$, *локальную степень* f в точке y .)

в) Докажите, что $\deg f = \sum_{y \in f^{-1}(x)} \deg_y(f)$.

Задача 4.10. а) Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ линейное. Вычислите $A_* : H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

б) Пусть $f : S^n \rightarrow S^n$ гладкое, $f(x) = x$, причём $\det(d_x f : T_x S^n \rightarrow T_x S^n) \neq 0$. Вычислите $\deg_x(f)$.

в) Пусть вдобавок $f^{-1}(x) = x$. Докажите, что f гомотопн id или отражению.

- ▷ По *теореме Сарда*, для гладкого $f : S^n \rightarrow S^n$ найдётся точка $x \in S^n$ такая, что для любой $y \in f^{-1}(x)$ отображение $d_y f : T_y S^n \rightarrow T_x S^n$ невырожденно. Из *леммы Морса* следует, что $f^{-1}(x)$ конечно.

г*) Выведите, что гладкие отображения $S^n \rightarrow S^n$ одинаковой степени гомотопны.