ВШЭ, риманова геометрия. Листок 7.
Вариационный подход к геодезическим. 3.04.2022.

Задача 1. Пусть f такая функция на римановом многообразии, что в каждой точке $|\mathrm{grad} f| = 1$. Доказать, что интегральные кривые векторного поля $\mathrm{grad} f$ являются геодезическими.

Задача 2. Пусть риманово многообразие имеет постоянную секционную кривизну k. Доказать, что $R(X,Y)Z = k((X,Z)Y - (Y,Z)X)$.

Задача 3. Доказать, что геодезические в произвольной перепараметризации, лежащие на многообразии M и проходящие через заданные точки A и B, совпадают с экстремалями функционала длины

$$L[\gamma] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d\gamma}{dt}(t) \right| dt,$$

где $\gamma(t_0) = A$, $\gamma(t_1) = B$.

Задача 4. Докажите, что геодезические в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не имеют сопряженных точек.

Задача 5. Доказать, что кратность сопряжённых точек меньше размерности многообразия. Доказать, что точки, сопряжённые данной точке на данной геодезической, являются изолированными.

Задача 6. Вариация называется геодезической, если для каждого значения параметра вариации соответствующая кривая является геодезической. Докажите, что якобиевы поля — это в точности поля вариации геодезических вариаций.

Задача 7. Доказать, что северный и южный полюс сферы $\mathbb{S}^n$ являются сопряжёнными точками вдоль дуги большого круга кратности $n-1$.

Задача 8*. Пусть $p \in M$, $X, Y \in T_pM$, $\gamma(t) = \exp_p tX$ и J поле Якоби вдоль γ с начальными данными

$$J(0) = 0, \quad \nabla_{\dot\gamma} J(0) = Y.$$

Доказать, что

$$d_{tX} \exp_p(Y) = \frac{J(t)}{t}.$$

Доказать, что подпространство $\mathrm{Ker}\, d_X \exp_p$ изоморфно пространству полей Якоби вдоль $\gamma(t) = \exp_p tX$ с нулями в p и $\exp_p X$.

Задача 9*. Доказать, что на римановом многообразии

$$d(x,y) = \sup\{|\psi(x) - \psi(y)| : \psi \in C^\infty, |\mathrm{grad}\, \psi| \leqslant 1\}.$$

Задача 10*. Пусть M полное некомпактное риманово многообразие. Докажите, что для любой точки p существует геодезический луч, выходящий из p, то есть геодезическая $\gamma : [0, +\infty] \longrightarrow M$, такая, что $\gamma(0) = p$ и $d(p, \gamma(t)) = t$ для любого $t > 0$.