Лекции по группам и алгебрам Ли

1. Лекция 1. Группы Ли.

1.1. Основные понятия.

Определение 1.1. Вещественной (комплексной) *группой Ли* называется группа G со структурой вещественного (комплексного) гладкого многообразия (12.21), согласованной с групповыми операциями. А именно

(1) Отображение умножения $m : G \times G \to G,\ m(g,h) := gh$ гладко (голоморфно);
(2) Отображение обращения $i : G \to G,\ i(g) := g^{-1}$ гладко (голоморфно).

Замечание 1.2. Любая комплексная группа Ли естественным образом является вещественной группой Ли вдвое большей размерности.

В дальнейшем $\mathbb{k}$ обозначает либо поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Примеры.

(1) Любая не более чем счётная дискретная группа (в частности, конечная);
(2) Группа $\mathbb{R}$ по сложению – вещественная группа Ли размерности 1; группа $\mathbb{C}$ по сложению – комплексная группа Ли размерности 1, вещественная группа Ли размерности 2;
(3) Группа $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ по умножению – вещественная группа Ли размерности 1; группа $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ по умножению – комплексная группа Ли размерности 1, вещественная группа Ли размерности 2;
(4) Группа S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1 по умножению – вещественная группа Ли размерности 1;
(5) Группа
$$GL_n(\mathbb{k}) = \{A \in M_n(\mathbb{k}) \mid \det A \neq 0\},$$
вещественная(комплексная) группа Ли размерности n^2: как открытое подмножество векторного пространства $M_n(\mathbb{k})$ наделяется структурой гладкого многообразия. Умножение задаётся многочленами, обращение – рациональными функциями со знаменателем не обращающимся в ноль, то есть гладкими отображениями. $GL_n(\mathbb{C})$ является вещественной группой Ли размерности $2n^2$.
(6) Группа
$$Aff_n(\mathbb{k}) = \{X \to AX + b \,|A \in GL_n(\mathbb{k}), b \in \mathbb{k}^n\},$$
вещественная(комплексная) группа Ли размерности n^2+n. Элементы матрицы A и столбца b задают координаты на $Aff_n(\mathbb{k})$.
(7) Группа кватернионов $\mathbb{H}$ по сложению и группа $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ по умножению являются вещественными группами Ли размерности 4.
(8) Если G_1 и G_2 – группы Ли, то $G_1 \times G_2$ тоже группа Ли. Отсюда $\mathbb{k}^n, (S^1)^n, (\mathbb{k}^\times)^n$ – группы Ли.

Топологической группой Ли называется такое топологическое пространство, являющееся группой, что отображения умножения и взятия обратного элемента непрерывны. Предположим, что топологическая группа является топологическим многообразием. Сколько существует способов снабдить такую группу структурой группы Ли? Ответ следующий: на такой группе существует единственная структура вещественной группы Ли, см. Лекцию 5.

Отметим также, что комплексная группа Ли является аналитической по определению. В вещественном случае группа Ли автоматически аналитична, то есть умножение и обращение – аналитические отображения, [?].

Определение 1.3. *Подгруппой Ли* в группе Ли называется вложенное подмногообразие (12.30), являющееся подгруппой.

В дальнейшем мы будем называть подмногообразием вложенное подмногообразие.

Предложение 1.4. Подгруппа Ли группы Ли сама является группой Ли.

Доказательство. Достаточно проверить, что ограничение умножения и обращения – гладкие функции, что верно для любого подмножества группы Ли с индуцированной топологией. □

Примеры.

(1) $SL_n(\Bbbk)$ является подгруппой Ли $GL_n(\Bbbk)$. Действительно, в $GL_n(\Bbbk)$ группа $SL_n(\Bbbk)$ задаётся уравнением $\det X - 1 = 0$. Ранг матрицы Якоби размера $n^2 \times 1$ имеющей вид $\left(\frac{\partial det}{\partial x_{ij}}\right)$ равен 1 в любой точке группы $SL_n(\Bbbk)$, так как частная производная определителя – это соответствующий минор матрицы X. При этом если все миноры нулевые, то и сама матрица вырождена. Это означает, что $SL_n(\Bbbk)$ – вложенное подмногообразие группы Ли $GL_n(\Bbbk)$ (12.34).

(2) Любая дискретная подгруппа группы Ли является подгруппой Ли.

(3) Единичные кватернионы образуют подгруппу Ли в мультипликативной группе Ли $\mathbb{H}^*$. Действительно, они задаются уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, то есть являются трёхмерной сферой S^3 как многообразие.

(4) Группа B нестрого верхнетреугольных матриц является подгруппой Ли в $GL_n(\Bbbk)$, так как задаётся системой уравнений $a_{21} = \ldots = a_{n,n-1} = 0$ в $GL_n(\Bbbk)$ и матрица Якоби имеет ранг $\frac{n(n-1)}{2}$ в любой точке группы B.

Предложение 1.5. Пусть H – подгруппа Ли группы Ли G. Тогда H является замкнутым подмногообразием в G.

Доказательство. Из непрерывности операций умножения и обращения следует, что замыкание $\overline{H}$ подгруппы H – тоже подгруппа группы G. Более того, так как H – подмногообразие в G, то H является открытым подмножеством в $\overline{H}$ (12.45). Отображение $L_g : G \to G, x \mapsto gx$ является диффеоморфизмом, следовательно Hg открыто в $\overline{H}$ для любого $g \in \bar{H}$. Тогда

$$H = \overline{H} \setminus \bigcup_{g \in \overline{H} \setminus H} Hg$$

замкнуто в $\overline{H}$, а следовательно, $H = \overline{H}$.

□

На самом деле для вещественных групп Ли верно и обратное: замкнутая подгруппа вещественной группы Ли является подгруппой Ли. Для комплексных групп Ли это неверно, например S^1 не является комплексной подгруппой Ли группы Ли $\mathbb{C}^\times$ из соображений размерности.

Определение 1.6. Гладкое отображение групп Ли, являющееся гомоморфизмом групп, называется гомоморфизмом групп Ли. *Изоморфизмом* групп Ли называется биективный гомомоморфизм, такой, что обратное отображение также является гомоморфизмом групп Ли.

Замечание 1.7. Отметим, что не очевидно, что биективный гомоморфизм групп Ли – изоморфизм. Например, для гладких многообразий биективное гладкое отображение не обязано быть диффеоморфизмом. Тем не менне, ниже мы покажем, что для групп Ли биективный гомоморфизм – это изоморфизм.

Примеры. Следующие отображения являются гомоморфизмами групп Ли:

(1) Для любой подгруппы Ли H группы Ли G вложение
$$\mathrm{in} : H \hookrightarrow G;$$
(2) Отображение $\Bbbk \to \Bbbk^\times, x \mapsto exp(x)$;
(3) Отображение $\mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t}$ с ядром $\mathbb{Z}$;
(4) Отображение $Aff_n(\Bbbk) \to GL_n(\Bbbk)$, $AX + B \mapsto A$ с ядром $\Bbbk^n$;
(5) Любой гомоморфизм не более чем счётных дискретных групп;
(6) Отображение $\det : GL_n(\Bbbk) \to \Bbbk^\times$ с ядром $SL_n(\Bbbk)$.

Замечание. Ниже мы покажем, что ядро гомоморфизма групп Ли – это подгруппа Ли. Но, вообще говоря, неверно что гомоморфный образ группы Ли является подгруппой Ли. Например образ отображения $\mathbb{Z} \to S^1, x \mapsto \exp(ix)$ всюду плотен, следовательно, не является подгруппой Ли. Ещё один пример – "всюду плотная обмотка тора": отображение $\mathbb{R} \to S^1 \times S^1, x \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi i\alpha t})$ для иррационального α. Его образ всюду плотен, следовательно, не является подгруппой Ли. Ниже мы покажем, что образ гомоморфизма групп Ли является *виртуальной подгруппой Ли.*

1.2. **Действия групп Ли на многообразиях.**

Определение 1.8. (Левое) действие группы Ли G на гладком многообразии X это (левое) действие G на X как на множестве такое, что отображение

$$\alpha : G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$$

является гладким.

Примеры.

(1) Группа G естественно действует на себе умножениями слева, справа и сопряжениями:

$$g \cdot h = L_g h := gh,$$
$$g \cdot h = R_{g^{-1}} h := hg^{-1},$$
$$g \cdot h = L_g \circ R_{g^{-1}} h = ghg^{-1}.$$

(2) Любой гомоморфизм $\varphi : G \to H$ определяет действие G на H по правилу

$$g \cdot h = \varphi(g)h.$$

Для любого $x \in X$ определим отображение $\alpha_x : G \to X, g \mapsto g \cdot x$.

Лемма 1.9. Отображение α_x – гладкое и имеет постоянный ранг.

Доказательство. Отображение α_x гладко как ограничение отображения α на $G \times \{x\}$. Для любого $g \in G$ определим $L_g : G \to G, x \to gx$ и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{L_g} & G \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_x} \\ X & \xrightarrow{g\cdot} & X \end{array}$$

Отображения L_g и $g\cdot$ – диффеоморфизмы, так что ранг α_x в точке h равен рангу α_x в точке gh, что и требовалось доказать. □

Следствие 1.10. Любая группа Ли G *параллелизуема*, то есть её касательное расслоение тривиально (12.38).

Доказательство. Рассмотрим левое действие группы Ли G на себе. Касательное пространство T_gG отождествляется с касательным пространством T_eG в единице группы при помощи отображения d_eL_g. Это задаёт тривиализацию касательного расслоения TG. □

Как следствие, на двумерной сфере S^2 не существует структуры группы Ли. С помощью Леммы 1.9 и свойств отображений постоянного ранга (12.28), получаем следующую теорему.

Теорема 1.11. Пусть группа Ли G действует на многообразии X. Тогда

(1) Для любой $x \in X$ стабилизатор G_x является подгруппой Ли коразмерности $\operatorname{rk}\alpha_x$, причём $T_e(G_x) = \operatorname{Ker} d_e\alpha_x$.

(2) Для любой малой окрестности $O(e)$ единицы $e \in G$ множество $O(e) \cdot x$ является подмногообразием многообразия X, $\dim O(e) \cdot x = \operatorname{rk}\alpha_x$ и $T_x(O(e) \cdot x) = \operatorname{Im} d_e\alpha_x$.

(3) Если орбита Gx является подмногообразием в X, то $\dim Gx = \operatorname{rk} \alpha_x$.

Замечание 1.12. Отметим, что орбита не всегда является вложенным подмногообразием, см. пример обмотки тора, где образ, орбита единицы, не является вложенным подмногообразием. Тем не менее, она всегда является погруженным подмногообразием, что будет показано ниже.

Примеры.

(1) Группа

$$O_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^T = E\}$$

является подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{C})$, как стабилизатор единицы действия $GL_n(\mathbb{C})$ на пространстве симметрических матриц (= симметрических билинейных форм) по правилу

$$\Gamma \to A\Gamma A^T.$$

Орбиты этого действия дают классификацию симметрических билинейных форм. Орбит $n+1$ штука и их можно описать так:

$$GL_n(\mathbb{C}) \cdot \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i}),$$

где $i = 0, \ldots, n$.

(2) Группа

$$O_n(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AA^T = E\}$$

является подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{R})$, как стабилизатор единицы действия $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве симметрических матриц (= симметрических билинейных форм) по правилу

$$\Gamma \to A\Gamma A^T.$$

Аналогично группа

$$O_{p,q}(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid AJA^T = J\}, J = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$$

является подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{R})$, как стабилизатор матрицы J при том же действии группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$. Орбиты этого действия дают классификацию симметрических билинейных форм. Орбит $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ штук и их можно описать так:

$$GL_n(\mathbb{R}) \cdot \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}),$$

где $p + q + r = n$.

(3) Группа

$$U_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = E\}$$

является *вещественной* подгруппой Ли вещественной группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$ как стабилизатор единицы при действии на пространстве эрмитовых ($A = A^*$) матриц по правилу

$$\Gamma \to A\Gamma A^*.$$

Аналогично группы

$$U_{p,q} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AJA^T = J\}, J = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q})$$

является вещественной подгруппой Ли вещественной группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$, как стабилизатор матрицы J при том же действии группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$. Заметим, что это действие не является комплексно аналитическим, так что мы не можем утверждать, что U_n – комплексная подгруппа Ли $GL_n(\mathbb{C})$.

Орбиты этого действия дают классификацию симметрических эрмитовых форм. Орбит $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ штук и их можно описать так:

$$GL_n(\mathbb{C}) \cdot \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{q}, \underbrace{0,\dots,0}_{r}),$$
$$p+q+r=1.$$

(4) Группа

$$Sp_{2n}(\Bbbk) = \{A \in M_{2n}(\Bbbk) \mid AJA^T = J\}, J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

где E – единичная $n \times n$ матрица, является подгруппой Ли группы $GL_{2n}(\Bbbk)$, как стабилизатор J при действии $GL_{2n}(\Bbbk)$ на пространстве кососимметрических матриц по тому же правилу, что и в пункте 1. Орбиты этого действия дают классификацию кососимметрических билинейных форм, их $n+1$ штука и их можно описать так:

$$GL_n(\Bbbk) \cdot \begin{pmatrix} 0 & E_k & 0 \\ -E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь E_k – единичная $k \times k$ матрица, $k = 0, \dots, n$.

(5) Группа Ли действует на себе умножениями слева, справа и сопряжениями. В первых двух случаях действие транзитивно, а стабилизаторы тривиальны. В последнем случае орбиты – это классы сопряжённости, а стабилизаторы – централизаторы элементов группы. В частности отсюда следует, что централизатор элемента группы Ли является подгруппой Ли.

Предложение 1.13. Ядро гомоморфизма групп Ли является нормальной подгруппой Ли.

Доказательство. Напомним, что любой гомоморфизм $\varphi : G \to H$ определяет действие G на H. Тогда ядро есть подгруппа Ли как стабилизатор единицы группы H. □

1.3. **Задачи.**

(1) Докажите, что верхнетреугольные матрицы с единицами на диагонали являются подгруппой Ли в группе Ли B верхнетреугольных матриц. Докажите, что подгруппы параллельных переносов и линейных преобразований являются подгруппами Ли $Aff_n(\Bbbk)$.
(2) Докажите, что группа $GL_n(\mathbb{H})$ невырожденных матриц с коэффициентами в кватернионах является вещественной группой Ли размерности $4n^2$.
(3) Докажите, что $GL_n(\mathbb{C})$ является вещественной подгруппой Ли $GL_{2n}(\mathbb{R})$. Является ли при этом группа $GL_n(\mathbb{H})$ комплексной подгруппой Ли $GL_n(\mathbb{C})$?
(4) Найдите размерности групп $O_n(\Bbbk), O_{p,q}(\mathbb{R}), U_n, Sp_{2n}(\Bbbk)$.
(5) Докажите, что $SO_n(\Bbbk)$ и SU_n, то есть элементы $O_n(\Bbbk)$ и U_n с определителем 1, являются подгруппами Ли в $GL_n(\Bbbk)$ и $GL_n(\mathbb{C})$ соответственно;
(6) Докажите, что U_n и SU_n не является комплексными подгруппами группы Ли $GL_n(\mathbb{C})$.

2. Лекция 2. Однородные пространства.

2.1. **Однородное пространство.** Пусть H – подгруппа Ли группы G. Рассмотрим множество (левых) смежных классов G/H. Группа G действует на G/H по правилу $g \cdot (g'H) = (gg')H$. Наша цель – ввести структуру гладкого многообразия на G/H таким образом, чтобы действие G на G/H было гладким. Оказывается, при некоторых дополнительных требованиях такая структура гладкого многообразия на G/H – единственна.

Определение 2.1. Пусть X, Y – гладкие многообразия. Сюръективное отображение $p : Y \to X$ называется *факторизацией*, если

(1) $U \subset X$ открыто тогда и только тогда когда $p^{-1}(U) \subset Y$ открыто.
(2) Для любого открытого $U \subset X$ функция $f : U \to \Bbbk$ гладкая тогда и только тогда когда $p^*f := f \circ p$ – гладкая.

Если $p : Y \to X$ – факторизация, то на уровне топологических пространств $X \simeq Y/\sim$, где $y_1 \sim y_2$ тогда и только тогда, когда $p(y_1) = p(y_2)$.

Примеры. 1) Пусть X, Z – гладкие многообразия и пусть $Y = X \times Z$. Тогда отображение $\mathrm{pr}_X : Y \to X$ – это факторизация. Отображение p называют тривиальным расслоением.
2) Локально тривиальное расслоение (12.38) является факторизацией.

Предложение 2.2. Пусть X, Y, Z – гладкие многообразия, $p : Y \to X$ – факторизация и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \\ & X \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Тогда φ является гладким тогда и только тогда, когда ψ является гладким.

Доказательство. Заметим, что ψ – гладкое тогда и только тогда, когда $\psi^* f$ – гладкое для любой гладкой $f : Z \to \Bbbk$, так как в качестве f можно взять координатные функции в данной карте многообразия Z.

Из того, что p – факторизация, получаем, что $\psi^* f$ гладко тогда и только тогда, когда $p^*\psi^* f = \varphi^* f$ – гладко, что равносильно гладкости φ. $\square$

Понятие факторизации проясняет следующее наблюдение: если Y – гладкое многообразие, X – множество и $p : Y \to X$ – сюръективное отображение, то на X существует не более одной структуры гладкого многообразия такой, что отображение p – факторизация. Это следует из Предложения 2.2: если φ тоже факторизация и ψ – биекция, то ψ – диффеоморфизм.

Теорема 2.3. Пусть G – группа Ли, $H \subset G$ – подгруппа Ли. Тогда на множестве G/H левых смежных классов существует единственная структура гладкого многообразия при которой отображение

$$p : G \to G/H, g \mapsto gH$$

является факторизацией. При этом:

- $\dim G/H = \dim G - \dim H$;
- Отображение p – локально тривиальное расслоение;
- Действие G на G/H – гладкое действие на гладком многообразии;
- Если H – нормальная подгруппа, то G/H является группой Ли.

Доказательство.

Лемма 2.4. G/H – хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой.

Доказательство. Топология на G/H – это фактор-топология на G по разбиению на левые смежные классы. Она задаётся следующим образом: $U \subset G/H$ – открыто в G/H, если и только если полный прообраз $p^{-1}(U)$ открыт в G. Очевидно, что p – непрерывное отображение. Более того, p – открытое Действительно, если $U \subset G$ открыто, то $p(U)$ – открыто в G/H, так как $p^{-1}(p(U)) = U \cdot H$ – открыто. Докажем, что G/H – хаусдорфово. Пусть $g_1H, g_2H \in G/H$. Так как $g_1^{-1}g_2 \notin H$ и H – замкнуто, то из непрерывности отображений умножения и взятия обратного следует, что существуют такие окрестности элементов $g_1 \in O(g_1)$ и $g_2 \in O(g_2)$ в G, что $O(g_1)^{-1}O(g_2) \cap H = \varnothing$, следовательно $O(g_1)H \cap O(g_2)H = \varnothing$. Тогда из открытости p следует, что $p(O(g_1))$ и $p(O(g_2))$ будут непересекающимися окрестностями g_1H и g_2H в G/H. Наконец, так как p – открыто, то G/H обладает счётной базой. □

Лемма 2.5. Существует вложенное подмногообразие $S \subset G$ такое, что отображение умножения $m : S \times H \to G$ – диффеоморфизм на открытое подмножество V группы G.

Доказательство. Выберем некоторое подмногообразие $S_1 \ni e$, которое трансверсально пересекается с H в точке e, то есть $T_eG = T_eS_1 \oplus T_eH$: пусть $x_1, \dots, x_n$ – такие локальные координаты в окрестности $O(e)$ точки $e \in G$, что $e = (0, \dots, 0)$ и $H \cap O(e) = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$, тогда в качестве S_1 можно взять подмножество в $O(e)$, заданное уравнениями $\{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$. Рассмотрим отображение $\psi : S_1 \times H \to G, (s,h) \mapsto sh$. Тогда $d_{(e,e)}\psi(a,b) = a+b$, где $a \in T_eS_1, b \in T_eH$. Так как пересечение трансверсально, то $d_{(e,e)}\psi$ – изоморфизм. По теореме об обратной функции ψ – это локальный диффеоморфизм, то есть существуют такие открытые $S_2 \subset S_1$, $O \subset H$, содержащие e, что ограничение ψ на $S_2 \times O$ – диффеоморфизм на открытое подмножество W группы G.

Заметим, что $\psi(s, hh') = \psi(s,h)h'$. Это означает, что ψ является локальным диффеоморфизмом на $S_2 \times H$. Действительно, у точки $(s,h) \in S_2 \times H$ можно найти окрестность $S_2 \times Oh$, диффеоморфную открытому подмножеству Wh группы G. Осталось выбрать такую окрестность $S \subset S_2$, содержащую e, что $SS^{-1} \cap H \subset O$ (такая существует из непрерывности умножения). В этом случае отображение ψ локально-диффеоморфно и инъективно (следовательно, диффеоморфизм) на $S \times H$, таким образом подмногообразие S (открытое подмножество S_1) – искомое. □

Построим структуру гладкого многообразия на G/H следующим образом.

- Из леммы следует, что $U := p(V)$ гомеоморфно S. Это позволяет перенсти струкутуру многообразия с S на окрестность eH;
- Множество gU является окрестностью точки gH гомеоморфной $p(V)$;
- По построению p – локально-тривиальное расслоение над каждым gU.
- Более того, над $gU_1 \cap gU_2$ гладкие структуры диффеоморфны, по свойству факторизации. Это означает, что структура многообразия введена корректно.

Докажем теперь что действие G на G/H – гладкое. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times p"'] \arrow[dr, "q"] & G \arrow[d, "p"] \\
G \times G/H \arrow[r, "\lambda"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Здесь m – умножение в G, λ – естественное действие G на G/H. Несложно видеть, что произведение локально тривиальных расслоений является локально тривиальным расслоением. Это означает, что $\mathrm{id} \times p$ – факторизация. Отображение $q = p \circ m$ – гладкое, следовательно, λ – гладкое.

Пусть теперь H – нормальная подгруппа в G. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "m"] \arrow[d, "p\times p"'] \arrow[dr, "q"] & G \arrow[d, "p"] \\
G/H \times G/H \arrow[r, "m_H"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Здесь m_H – умножение в G/H. Так как $q = p \circ m$ гладкое, получаем, что m_H – гладкое, аналогично пункту 3). Гладкость обратного отображения в G/H следует из коммутативной диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "r"] & G \arrow[d, "p"] \\
G/H \arrow[r, "i_H"'] & G/H
\end{tikzcd},$$

где i – отображение взятия обратного элемента в G, i_H – отображение взятия обратного элемента в G/H, $r = p \circ m$.

□

Утверждение о том, что G/H является многообразием – это частный случай следующего утверждения: Пусть группа Ли G действует на многообразии X гладко, свободно (то есть для любого $x \in X$ если $g \cdot x = h \cdot x$, то $g = h$) и собственно (то есть при отображении $G \times X \to X$ прообраз компактного подмножества является компактным подмножеством). Тогда на пространстве орбит X/G существует единственная структура гладкого многообразия такая, что естественное отображение $G \to X/G$ является гладким, а дифференциал – сюръективным в любой точке.

Следствие 2.6. Касательное пространство $T_{eH}(G/H)$ канонически изоморфно T_eG/T_eH.

Доказательство. Так как p – локально-тривиальное расслоение, то дифференциал

$$d_ep : T_eG \to T_e(G/H)$$

сюръективен и $\ker d_ep = T_eH$. □

Следствие 2.7. Пусть $f : G \to G$ – автоморфизм группы G. Пусть H_1, H_2 подгруппы Ли, причём $f(H_1) = H_2$. Тогда G/H_1 диффеоморфно G/H_2.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & & G/H_2 \\
& G/H_1 \arrow[ur, "{[f]}"'] &
\end{tikzcd}$$

где $f(gH_1) = f(g)H_2$. Отсюда из свойств факторизации получаем что отображение $[f]$ – диффеоморфизм. □

Следствие 2.8. Пусть G действует на гладком многообразии X и пусть $x \in X$. Тогда:

(1) Отображение $\beta_x : G/G_x \to X, [g] \mapsto g \cdot x$ является инъективной иммерсией $G/G_x \to X$ с образом Gx. Таким образом орбита является вложенным подмногообразием многообразия X. Более того, структура вложенного многообразия на орбите не зависит от выбора точки x орбиты.

(2) Если действие G на X транзитивно, то X диффеоморфно G/G_x.

Доказательство. 1) Пусть $\alpha_x : G \to X, g \to g \cdot x$. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\alpha_x"] \arrow[dr, "p"'] & & X \\ & G/G_x \arrow[ur, "\beta_x"'] & \end{tikzcd}$$

Так как p – факторизация и α_x – гладкое, то и β_x – гладкое. На уровне множеств β_x – биекция между G/G_x и орбитой Gx. Более того, $\operatorname{rk}\alpha_x$ постоянен и равен

$$\dim Gx = \dim G - \dim G_x,$$

а дифференциал отображения p сюръективен в любой точке. Из этого следует, что β_x – инъективная иммерсия, а значит Gx – вложенное подмногообразие многообразия X.

Пусть теперь $g \cdot x = x_1 \in Gx$ – другая точка орбиты Gx. Заметим, что

$$\mathrm{Ad}_g : G \to G, h \mapsto ghg^{-1}$$

автоморфизм группы Ли G. При этом $gG_xg^{-1} = G_{x_1}$, следовательно, G/G_x диффеоморфно G/G_{x_1}.

2) Следует из первого пункта, так как в этом случае β_x – гладкая биекция и дифференциал в любой точке является изоморфизмом. □

Следствие 2.9. Структура гладкого многообразия на G/H такая, что действие G на H является гладким – единственна.

Доказательство. Достаточно применить рассуждение из доказательства предыдущего следствия к транзитивному действию G на G/H. □

Определение 2.10. Однородным пространством называется гладкое многообразие с транзитивным действием группы Ли.

Определение 2.11. Однородное пространство – это пространство диффеоморфное многообразию G/H, где G – это группа Ли, а H – подгруппа Ли.

Из второго пункта следствия 2.8 следует эквивалентность определений.

Примеры. (1) Определим множество флагов $Fl_{k_1,\dots,k_m}$ векторного пространства $\Bbbk^n$ как набор вложенных подпространств $\{0\} \subset U_1 \subset \ldots \subset U_m \subset V$, где $\dim U_i = k_i$. На этом множестве транзитивно действует группа $GL_n(\Bbbk)$. Это позволяет *определить* структуру гладкого многообразия на пространстве флагов посредством биекции $G/G_x \simeq Fl_{k_1,\dots,k_m}$ (здесь x – произвольный элемент множества флагов). Частный случай $m = 1$ позволяет определить структуру гладкого многообразия на грассманиане $Gr(k, n)$.

(2) Группа $SO_3(\mathbb{R})$ транзитивно действует на S^2, причём стабилизатор любой точки это $SO_2(\mathbb{R})$. Это значит, что $S^2 \simeq SO_3(\mathbb{R})/SO_2(\mathbb{R})$. Если заметить, что $SO_2(\mathbb{R})$ диффеоморфно S^1, то получаем локально тривиальное расслоение $p : SO_3(\mathbb{R}) \to S^2$ со слоем S^1, которое связанно с *расслоением Хопфа* сферы S^3 над S^2 со слоем S^1.

(3) В $GL_n(\Bbbk)$ рассмотрим подгруппу $\Bbbk^\times$, состоящую из скалярных матриц. Тогда $\Bbbk^\times$ – это нормальная подгруппа Ли группы Ли $GL_n(\Bbbk)$. Это позволяет определить проективную линейную группу

$$PGL_n(\Bbbk) \simeq GL_n(\Bbbk)/\Bbbk^\times.$$

2.2. **Виртуальные подгруппы Ли и теорема о гомоморфизме.**

Определение 2.12. *Виртуальная подгруппа Ли* – это подгруппа группы Ли G, являющаяся погруженным подмногообразием (12.29).

Предложение 2.13. Виртуальная подгруппа группы Ли сама является группой Ли.

Доказательство. В окрестности любой своей точки погруженное подмногообразие является вложенным подмногообразием (12.31). Ограничение гладких функций на вложенное подмногообразие является гладким. □

Заметим, что если M – произвольное многообразие, а $N \subset M$ – некоторое подмножество, то, вообще говоря, оно может быть наделено структурой вложенного подмногообразия больше чем одним способом. Например, рассмотрим объединение S^1 с единичным касательным отрезком (не включая конец), как подмножество $\mathbb{R}^2$. Существуют инъективные иммерсии с одной стороны интервала, с другой стороны объединения интервала и окружности, которые задают различные структуры гладких многообразий на этом объединении.

Предложение 2.14. Любая абстрактная подгруппа группы Ли может быть наделена структурой виртуальной подгруппы Ли не более чем одним способом.

Доказательство.

Лемма 2.15. Пусть H виртуальная подгруппа группы Ли G. Тогда существует окрестность $O_H(e)$ единицы в группе H, и такое вложенное подмногообразие $S \subset G$, что отображение умножения $S \times O_H(e)$ является диффеоморфизмом на некоторую окрестность единицы $O_G(e)$ группы Ли G. Более того существует такая связная окрестность. При этом:

- $H \cap O_G(e) = T \cdot O_H(e)$, где $T = H \cap S$ – не более чем счётное множество;
- Если $O_H(e)$ – связна, то она совпадает со связной компонентной единицы $H \cap O_G(e)$ в индуцированной топологии.

Доказательство. Выберем окрестность единицы в $O_H(e)$, которая является подмногообразием в G. Если $O_H(e)$ не связна в H, то связная компонента единицы $O_H(e)$ в H также является подмногообразием. Подмногообразие S в этом случае строится дословно, как и в доказательстве Теоремы 2.3. □

Пусть H_1 и H_2 – две виртуальные подгруппы Ли, совпадающие как абстрактные подгруппы. Рассмотрим тождественное отображение $\mathrm{id} : H_1 \to H_2$. Из леммы следует, что это отображение дифференцируемо в окрестности единицы, а, значит, и в любой точке (3.11).

□

Подгруппа вещественной группы Ли является виртуальной подгруппой Ли тогда и только тогда, когда в индуцированной топологии они содержат не более чем счётное число компонент линейной связности, [**?**].

Теорема 2.16. Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ – гомоморфизм групп Ли. Тогда $\operatorname{Ker}\varphi$ – нормальная подгруппа Ли в G_1 и $\operatorname{Im}\varphi \simeq G_1/\operatorname{Ker}\varphi$ является виртуальной подгруппой Ли в группе Ли G_2. В частности, если образ φ замкнут, то $\operatorname{Im}\varphi$ является подгруппой Ли группы Ли G_2, изоморфной группе Ли $G_1/\operatorname{Ker}\varphi$.

Доказательство. G_1 действует на G_2 по правилу $g_1 \cdot g_2 = \varphi(g_1)g_2$. Тогда теорема – это частный случай следствия 2.8, где $\operatorname{Ker}\varphi$ – стабилизатор единицы $e \in G$. Утверждение в случае замкнути образа следует из теоремы 5.9. □

Замечание. Отметим, что изоморфизм теоремы 2.16 устроен следующим образом

$$G_1/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Im}\varphi, [g_1] \to \varphi(g_1).$$

Следствие 2.17. Биективный гомоморфизм групп Ли является изоморфизмом.

Примеры. (1) Пусть ненулевые целые числа m, n не имеют общего делителя. Рассмотрим гомоморфизм групп Ли

$$f : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto e^{2\pi i t \frac{m}{n}}.$$

Тогда $\operatorname{Ker} f = \{k \cdot \frac{n}{m} \mid k \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z}$. При этом f – сюръективный гомоморфизм. Это означает, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$.

(2) Рассмотрим гомоморфизм групп Ли $Aff_n(\Bbbk) \to GL_n(\Bbbk)$, $AX+B \mapsto A$. Он сюръективен, ядро изоморфно группе параллельных переносов $\Bbbk^n$, следовательно,
$$GL_n(\Bbbk) \simeq Aff_n(\Bbbk)/\Bbbk^n.$$

(3) Пусть B – группа Ли верхнетреугольных матриц, а N – группа Ли строго верхнетреугольных матриц, T – группа Ли диагональных матриц. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм
$$\varphi : B \to T,$$
который в качестве образа берёт диагональные элементы матрицы из B. Тогда это сюръективный гомоморфизм групп Ли с ядром N и $B/N \simeq T$.

2.3. **Полупрямое произведение групп Ли.** Пусть G_1 и G_2 – группы Ли. Пусть задано некоторое гладкое действие G_2 на G_1 автоморфизмами. Обозначим через $b(g_2)$ соответствующий автоморфизм группы Ли G_1.

У читателя может возникнуть вопрос – является ли группа автоморфизмов группы Ли группой Ли? Для связной группы Ли существует естественная структура группы Ли на группе автоморфизмов, см. лекцию 6.

Определение 2.18. Полупрямым произведением $G_1 \rtimes G_2$ называется группа Ли, которая как гладкое многообразие совпадает с $G_1 \times G_2$, а произведение задаётся следующей формулой
$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot b(h_1)(g_2), h_1 h_2)$$

Легко видеть, что при таком определении у любого элемента есть и обратный, а также, что операция произведения является гладким отображением. Отметим также, что G_1 и G_2 в этом случае являются подгруппами Ли. Пусть G – группа Ли, G_1 и G_2 – её подгруппы Ли.

Определение 2.19. Говорят, что G разлагается в полупрямое произведение подгрупп Ли G_1 и G_2, если 1) G_1 нормальна в G; 2) $G_1 \cdot G_2 = G$; 3) $G_1 \cap G_2 = \{e\}$.

Теорема 2.16 позволяет доказать, что в последнем случае $G \simeq G_1 \rtimes G_2$. Действительно, определим действие G_2 на G_1 по формуле $b(g_2)(g_1) = g_2 g_1 g_2^{-1}$. Очевидно, что это является гладким действием. Это позволяет определить биективный гомоморфизм групп Ли
$$G_1 \rtimes G_2 \to G, (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$
который является изоморфизмом групп Ли согласно следствию 2.17.

Отметим также, что если $G \simeq G_1 \rtimes G_2$, то $G/G_1 \simeq G_2$ и мы получаем точную последовательность
$$1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1.$$

Пусть теперь $1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1$ – точная последовательность групп Ли. Возникает вопрос, является ли группа Ли G полупрямым произведением групп G_1 и G_2?

Предложение 2.20. Пусть
$$1 \to G_1 \xrightarrow{f_1} G \xrightarrow{f_2} G_2 \to 1$$
является точной последовательностью групп Ли. Тогда $G \simeq G_1 \rtimes G_2$ тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм групп Ли
$$s : G_2 \to G$$
такой, что $f_2 \circ s = \mathrm{id}_{G_2}$.

Доказательство. Из теории групп известно, что G в этом случае полупрямое произведение подгрупп G_1 и $s(G_2)$ как абстрактная группа. Из (2.17) следует, что $f_1(G_1)$ и $s(G_2)$ – виртуальные подгруппы Ли. Утверждение предложение следует из следующей леммы.

Лемма 2.21. Пусть группа G раскладывается (как абстрактная группа) в полупрямое произведение виртуальных подгрупп Ли $G = G_1 \rtimes G_2$. Тогда G_1 и G_2 являются подгруппами Ли.

Доказательство. □

□

Примеры. (1) Пусть $\varphi : G \to GL_n(\Bbbk)$ гладкий гомоморфизм групп. Это определяет гладкое действие автоморфизмами группы Ли G на группе $\Bbbk^n$. Таким образом определено полупрямое произведение $\Bbbk^n \rtimes G$.

(2) $Aff_n(\Bbbk^n) \simeq \Bbbk^n \rtimes GL_n(\Bbbk^n)$. Здесь $\Bbbk^n$ – это группа параллельных переносов, а действие $GL_n(\Bbbk)$ на $\Bbbk^n$ – стандартное.

(3) $GL_n(\Bbbk) \simeq SL_n(\Bbbk) \rtimes \Bbbk^\times$. Здесь $\Bbbk^\times$ – это диагональные матрицы вида

$$\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1), \lambda \in \Bbbk^\times.$$

2.4. **Задачи.**

(1) Пусть G – компактная группа Ли и G действует на многообразии X.
   - Докажите, что любая орбита является вложенным подмногообразием.
   - Докажите, что класс сопряжённости в компактной группе Ли является вложенным подмногообразием.
   - Докажите, что образ компактной группы Ли при гомоморфизме является подгруппой Ли.

(2) Покажите, что любое многообразие (неполных) флагов $Fl_{k_1,\dots,k_m}$ в пространстве $\Bbbk^n$ – компактно.

(3) Докажите, что пересечение двух подгрупп Ли в группе Ли и полный прообраз подгруппы Ли при гомоморфизме групп Ли – тоже подгруппа Ли. Приведите пример пересечения двух подмногообразий многообразия, которое не является подмногообразием.

(4) Докажите, что $SU(n+1)/SU(n) \simeq S^{2n+1}$

(5) Докажите, что группа Ли B невырожденных треугольных матриц является полупрямым произведением подгрупп Ли верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали и невырожденных диагональных матриц.

Аппендикс А. Гладкие многообразия.

Через $\Bbbk$ мы обозначаем поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Под *гладким отображением* вещественных или комплексных многообразий мы будем понимать бесконечно дифференцируемое отображение в вещественном случае и голоморфное – в комплексном.

Определение 12.21. Гладкое многообразие X размерности n над полем $\Bbbk$ – это хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой снабженное набором открытых множеств $U_\alpha, \alpha \in I$ и гомеоморфизмов $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \Bbbk^n$ (атласом) таким, что $\bigcup U_\alpha = X$ и для любых $\alpha, \beta \in I$ отображение $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \Bbbk^n \to \Bbbk^n$ гладко.

Пусть $m \in U$ – окрестность, $\varphi : U \to \Bbbk^n$ – карта, $\gamma_1, \gamma_2 : (-1,1) \to U, \gamma_1(0) = \gamma_2(0) = m$ и $\varphi \circ \gamma_1, \varphi \circ \gamma_2 : (-1,1) \to \Bbbk^n$ – гладкие. Тогда $\gamma_1 \tilde{\gamma}_2$ если $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$. Обозначим класс эквивалентности через $\gamma'(0)$, а множество классов эквивалентности через $T_m M$.

Лемма 12.22.
- Отображение $d_m\varphi : T_m M \to \Bbbk^n, \gamma'(0) \mapsto (\varphi \circ \gamma(0))'$ (дифференциал) – биективно.
- Введём на $T_m M$ структуру векторного пространства посредством $d_m\varphi$. Эта структура не зависит от выбора φ.

Определение 12.23. Касательное пространство в точке m к многообразию M это $T_m M$.

Определим множество дифференцирований в точке $m \in M$ как множество линейных отображений $\delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ таких, что $\delta(fg)(m) = f(m)\delta(g) + g(m)\delta(f)$, для любой $m \in M, f, g \in C^\infty(M)$. Пространство дифференцировний – векторное пространство относительно умножения на скаляр и сложения.

Определение 12.24. Касательное пространство к многообразию M в точке m это векторное пространство точечных дифференцирований.

Предложение 12.25. Определения касательного пространства эквивалентны, то есть они естественно изоморфны. А именно, соответствие

$$T_m M \leftrightarrow \{\text{дифференцирования в точке } m\}$$
$$\gamma'(0) \mapsto (D_\gamma : f \mapsto (f \circ \gamma)'(0))$$

является изоморфизимом векторных пространств.

Определение 12.26. Пусть M, N – многообразия и $f : M \to N$ – гладкое отображение. Говорят, что f – отображение постоянного ранга, если $\operatorname{rk} d_m f$ одинаков для любого $m \in M$.

Теорема 12.27. Пусть M, N – гладкие многообразия. Пусть $f : M \to N$, $\dim M = m, \dim N = n$ – гладкое отображение постоянного ранга k. Тогда для любой точки $m \in M$ существуют карты $(U, \varphi : U \to \mathbb{R}^m)$ и $(V, \psi : V \to \mathbb{R}^n)$ такие, что $f(U) \subset V$ и

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

Теорема 12.28. Пусть $f : M \to N$ – отображение постоянного ранга k. Тогда

(1) Для любой $n \in \operatorname{Im} f$ полный прообраз $f^{-1}(n)$ является вложенным подмногообразием многообразия M коразмерности k, причём $T_m(f^{-1}(y)) = \operatorname{Ker} d_m f$.

(2) Для любой $m \in M$ существует окрестность $O(m)$ точки m такая, что $f(O(m))$ – вложенное подмногообразие в N размерности k, причём $T_{f(m)}(f(O(m))) = \operatorname{Im} d_m f$.

Определение 12.29. Пусть N, M – многообразия. Погруженным подмногообразием многообразия M называется образ инъективной иммерсии $i : N \to M$, то есть такого инъективного гладкого отображения, что для любой точки $y \in Y$ дифференциал $d_y i :$

$T_yN \to T_{i(y)}M$ – инъективен. При этом топология и гладкая структура на $i(N)$ задаётся таким образом, что i – диффеоморфизм между N и $i(N)$.

Отметим, что, вообще говоря, топология на погруженном подмногообразии не совпадает с индуцированной топологией. Например, рассмотрим отображение открытого отрезка в плоскость, который делает из отрезка цифру 6. Это очевидно инъективная иммерсия, при этом индуцированная топология на отрезке не совпадает с топологией шестёрки. Более того, на одном и том же подмножестве многообразия M могут быть, вообще говоря, две разные структуры вложенного подмногообразия, см. пример после (2.2).

Определение 12.30. Вложенным подмногообразием называется такое погруженное подмногообразие, что иммерсия $i : N \to M$ является гомеоморфизмом между N и образом $i(N)$. Здесь на образе $i(N)$ топология – индуцированная с M.

Предложение 12.31. Погруженное подмногообразие локально является вложенным.

Доказательство. Применяя теорему об отображении постоянного ранга к иммерсии $i : N \to M$ получаем, что окрестность U теоремы является вложенным подмногообразием многообразия M. □

Более явно вложенное подмногообразие можно определить следующим образом.

Определение 12.32. Вложенное подмногообразие – это такое подмножество $Y \subset X$, надлённое индуцированной топологией, что для любой точки $y \in Y$ существует карта $y \in U_y \subset X, \varphi_y : U \to \Bbbk^n$ такая, что $\varphi(Y \cap U) \subset \Bbbk^k$.

Предложение 12.33. Вложенное подмногообразие N многообразия M является локально-замкнутым подмножеством (12.44).

Доказательство. Немедленно следует из (12.32). □

Приведём способы построения вложенных подмногообразий многообразия.

Предложение 12.34. Пусть M, N – многообразия размерностей m и n соответственно. Пусть N такое подмножество многообразия M, что для любой точки $a \in N$ существует такая окрестность $U \subset M$ точки a, что $U \cap N$ задаётся системой уравнений $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, i = 1, \ldots, m$, причём ранг матрицы Якоби в точке a равен m. Тогда N является вложенным подмногообразием размерности $n-m$. Более того, касательное пространство в точке a к N совпадает с пересечением ядер дифференциалов отображений f_i в точке a.

Комплексные многообразия.

Определение 12.35. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ – открытое множество. Отображение $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ называется голоморфным если оно
1) Гладкое как отображение $U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$;
2) Дифференциал f в каждой точке – комплексно-линейное отображение.

Определение 12.36. Отображение $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ называется голоморфным, если голоморфны все отображения $f_1, \ldots, f_m$. Иначе говоря, если d_xf в каждой точке является комплексно-линейным отображением.

Предложение 12.37. Пусть X, Y – комплексные многообразия и $f : X \to Y$ – гладкое отображение. Следующие определения эквивалентны:

1) Отображение f голоморфно, если для любых карт $U \subset X, \varphi : U \to X$ и $V \subset Y, \psi : V \to Y$ отображение

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \to V$$

голоморфно.

2) Отображение f голоморфно, если d_xf в каждой точке является комплексно-линейным отображением.

Определение 12.38. Пусть X, Y, Z – гладкие многообразия. Локально-тривиальным расслоением со слоем Z над X называется многообразие Y вместе с гладким сюръективным отображением $p : Y \to X$ со следующим свойством: $\forall\, x \in X$ существует окрестность U_x точки x такая, что $p^{-1}(U_x) \simeq U_x \times Z$ и ограничение p на $p^{-1}(U_x) \simeq U_x \times Z$ задаётся проекцией на первый сомножитель.

Определение 12.39. (не вполне строгое) Пусть M – вещественное многообразие. Почти комплексной структурой на M называется набор операторов $J(x) : T_xM \to T_xM$ таких, что $J(x)^2 = -1$ для любой $x \in M$ и J гладко зависит от точки $x \in M$.

Заметим, что комплексное многообразие автоматически имеет почти комплексную структуру – оператор умножения на i в каждом касательном пространстве.

Теорема 12.40 (Теорема Нилендера-Нюренберга)**.** Пусть (M, J) – вещественное многообразие с почти комплексной структурой. Тогда M является комплексным многообразием тогда и только тогда, когда тензор Ниенхауса

$$N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

равен нулю для любых векторных полей X, Y. Более того, структура комплексного многообразия на M, совместимая с J – единственна.

Предложение 12.41. Голоморфная функция на комплексном компактном многообразии постоянна.

Определение 12.44. Подмножество A топологического пространства X называется локально-замкнутым, если для любой $x \in A$ существует окрестность $x \ni U$ такая, что $U \cap A$ замкнуто в U.

Предложение 12.45. Пусть N – вложенное подмногообразие многообразия M. Тогда N открыто в своем замыкании $\mathrm{cl}_M(N)$.

Доказательство. Вспомним, что N – локально-замкнутое подмножество многообразия M. Это означает, что для любой точки $x \in N$ существует открытая окрестность $U \subset G$ такая, что $U \cap N$ замкнуто в U. Мы утверждаем, что $U \cap N$ открыто в $\mathrm{cl}_M N$, откуда следует требуемое утверждение. Действительно, так как $U \cap N$ замкнуто в N, то

$$U \cap N = \mathrm{cl}_U(U \cap N) = U \cap \mathrm{cl}_M N.$$

Последнее утверждение следует из следующих включений. Включение

$$\mathrm{cl}_U(U \cap H) \subset U \cap \mathrm{cl}_G U$$

очевидно. Для доказательства обратного включения выберем $x \in U \cap \mathrm{cl}_G U$. Из определения замыкания следует, что для любой открытой окрестности $x \in \tilde{U} \subset G$ верно, что $\tilde{U} \cap H \neq \emptyset$. Нам же нужно доказать, что для любой открытой (в U) окрестности $x \in \hat{U} \subset U$ верно, что

$$\hat{U} \cap (U \cap H) \neq \emptyset$$

Так как U открыто в G, то $\hat{U} \cap U$ тоже открытая в G окрестность, содержащая x, откуда следует требуемое.

Предложение 12.46. Отображение $f : X \to Y$ непрерывно, тогда и только тогда когда $\Gamma = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\} \subset X \times Y$ – замкнуто.

Определение 12.47. Пусть X, Y – топологические пространства. Накрытием $p : Y \to X$ называется сюръективное непрерывное отображение такое, что для любой $x \in X$ существует окрестность $x \in U$ что $p^{-1}(U) = \bigsqcup_\alpha V_\alpha$, $V_\alpha \subset Y$ – открыты, и ограничение p на V_α – гомеоморфизм.

Определение 12.48. Пусть X – топологическое пространство. Универсальное накрытие, это накрытие $p : Y \to X$, Y – односвязное (то есть линейно-связное с тривиальной фундаментальной группой) пространство

Теорема 12.49. (1) Пусть $X, \tilde{X}, Y$ – топологические пространства, Y – локально линейно связно, $\tilde{X}$ – линейно связно, $x_0 \in X, \tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ и $p : \tilde{X} \to X$ – накрытие, $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Пусть $f : Y \to X$ – непрерывное отображение, $f(y_0) = x_0$ и $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$. Тогда существует единственное отображение $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ такое, что $p \circ \tilde{f} = f$ и $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

(2) Пусть X, Y – топологические пространства, Y – локально линейно связно и $p_1 : \tilde{X} \to X, p_2 : \tilde{Y} \to Y$ универсальные накрытия. Пусть $f : X \to Y$, $f(x_0) = y_0$ – непрерывные отображения и $f_*(\pi_1(X, x_0)) \subset \pi_1(Y, y_0)$. Пусть $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}, \tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ и $f(p_1(\tilde{x}_0)) = p_2(\tilde{y}_0)$. Тогда существует единственное непрерывное отображение $F : X \to Y$ такое, что $F \circ p_1 = p_2 \circ F$ и $F(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$.

Определение 12.50. Автоморфизм накрытия $p : Y \to X$ это такой гомеоморфизм $f : Y \to Y$, что $p \circ f = p$.

Ясно, что автоморфизмы накрытия образуют группу.

Определение 12.51. Пусть Y – линейно связно, $p : Y \to X$ – накрытие, $p(y_0) = x_0$. Накрытие называется регулярным, если $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ – нормальная подгруппа $\pi_1(X, x_0)$.

Предложение 12.52. Группа автоморфизмов регулярного накрытия $p : Y \to X$, $p(y_0) = x_0$ антиизоморфна $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(Y, y_0))$