Группы - 2.

Задача 1. а) Докажите, что A_n порождается циклами длины 3.
б) Задайте A_n образующими и соотношениями.

Задача 2. а) Задайте группу $SL_2(\mathbb{Z})$ образующими и соотношениями.
б) Докажите, что $[SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Z})]$ является собственной подгруппой $SL_2(\mathbb{Z})$.
в) Найдите $|SL_2(\mathbb{Z}) : [SL_2(\mathbb{Z}), SL_2(\mathbb{Z})]|$.

Задача 3. Пусть G – конечнопредставленная группа, причём число соотношений меньше чем число образующих. Докажите, что G бесконечна.

Задача 4. а) Выясните, при каких n имеется изоморфизм $GL_n(\mathbb{R}) \simeq SL_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^\times$.

б) Докажите, что $(\mathbb{Q}, +)$ не является прямым произведением двух нетривальных подгрупп.

Задача 5. а) Верно ли, что подгруппа прямого произведения двух групп $G_1 \times G_2$ является прямым произведением $H_1 \times H_2$, где $H_1 \subset G_1, H_2 \subset G_2$ подгруппы?

б*) Пусть G и H – произвольные группы. Определим множество пятёрок $(G_1, G_2, H_1, H_2, \varphi)$, где $G_2 \trianglelefteq G_1 \leq G$, $H_1 \trianglelefteq H_2 \leq H$ и $\varphi : G_1/G_2 \to H_1/H_2$ – изоморфизм. Тогда соответствие

$$\{\text{пятёрки}\} \to \{\text{подгруппы}\, G \times H\}$$
$$(G_1, G_2, H_1, H_2, \varphi) \mapsto X = \{(g, h) \,|\, \varphi(gG_2) = hH_2\} \subset G \times H$$

является биекцией.

в*) Опишите все подгруппы группы $\mathbb{Z}_5 \times S_4$.

Задача 6. Опишите сохраняющие ориентацию и полные группы симметрий: **а)** тетраэдра **б)** куба/октаэдра **в)** додекаэдра/икосаэдра.