7. Лекция 7. Линейные отображения.

7.1. **Умножение матриц.** Пусть U, V, W – векторные пространства над полем $\Bbbk$ размерностей m, n, k соответственно и $\mathcal{A} : U \to V$, $\mathcal{B} : V \to W$ – линейные отображения. Выберем базисы $\langle u_1, \dots, u_m\rangle, \langle v_1, \dots, v_n\rangle, \langle w_1, \dots, w_k\rangle$ пространств U, V, W и матрицы операторов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

в этих базисов. Тогда $\mathcal{C} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} : U \to W$ и его матрица в базисах $\langle u_1, \dots, u_m\rangle, \langle w_1, \dots, w_k\rangle$ имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} & \dots & c_{km} \end{pmatrix}$$

где $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$. Действительно,

$$\mathcal{B} \circ \mathcal{A}(u_j) = \mathcal{B}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \sum_{i=1}^{m} b_{ik} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}\right) w_i$$

Таким образом мы можем определить умножение матриц $BA := C$. В частности, если $U = V = W$, то $(Hom(V, V), +, \circ)$ – ассоциативное кольцо с единицей. Выбор базиса задаёт изоморфизм

$$Hom(V, V) = M_n(\Bbbk)$$

и тем самым $(M_n(\Bbbk), +, \times)$ – это ассоциативное кольцо с единицей.

7.2. **Матрица линейного отображения.**

Предложение 7.1. Пусть $\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение. Тогда существуют такие базисы пространств U, V, что матрица оператора $\mathcal{A}$ в этих базисах имеет вид $\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_k – единичная $k \times k$ матрица.

Доказательство. Пусть $\langle u_1, \dots, u_k\rangle$ – это базис $\ker \mathcal{A}$ и $\langle u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\rangle$ – базис U. Тогда $f(u_{k+1}), \dots, f(u_n)$ – это базис $\operatorname{Im} \mathcal{A}$. Пусть $\langle f(u_{k+1}), \dots, f(u_n), v_1, \dots, v_s$ – базис V. Тогда матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисах $\langle u_1, \dots, u_n\rangle$ и $\langle f(u_{k+1}), \dots, f(u_n), v_1, \dots, v_s$ имеет требуемый вид. □

Следствие 7.2. Пусть $\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение. Тогда $\dim \ker \mathcal{A} + \dim \operatorname{Im} \mathcal{A} = \dim U$.

Определение 7.3. Пусть $\mathcal{A} : U \to V$ – линейное отображение. Тогда ранг $\operatorname{rk} \mathcal{A}$ это $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A}$.

Следствие 7.4. Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ – линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $\mathcal{A}$ – изоморфизм;
(2) $\ker \mathcal{A} = 0$;
(3) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$;

Доказательство. (1–>2) Если $v \in \ker \mathcal{A}$, то для любого $u \in U$ имеем $f(u + v) = f(u)$, что противоречит тому, что $\mathcal{A}$ – изоморфизм.
(2<–>3) Следует из следствия 7.2.
(3 –>1) Ясно, что $\mathcal{A}$ – сюръекция. Если не инъекция, то существуют $u, v \in V, u \neq v$ $\mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v)$. Но тогда $u - v \in \ker(\mathcal{A})$, что противоречит 2). □

Как найти обратный оператор? Предположим что в некотором базисе матрица оператора имеет вид A. Запишем матрицу $n \times 2n$

$$(A \,|\, E)$$

и приведём её методом Гаусса к строго верхнетреугольному виду. Тогда, либо получим матрицу

$$(E \,|\, C)$$

и в этом случае $A^{-1} = C$, либо A – необратима. Действительно, преобразования метода Гаусса – это умножения слева на матрицы следующего вида:

- Вычесть из одного уравнения другое умноженное на число – $E + \lambda E_{ij}$.
- Переставить уравнения – $E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$.
- Умножить уравнение на ненулевое число – $\mathrm{diag}(1, \ldots, \lambda, \ldots 1)$.

Здесь E_{ij} – матрица из нулей и единицей на ij-ом месте.

Заметим, что все матрицы из метода Гаусса – невырождены. Это означает, что если у нас в итоге получилась вырожденная матрица, то и исходная была вырождена. Иначе получим, что

$$(E \,|\, A_1 \ldots A_n)$$

причем $A_1 \ldots A_n A = E$, то есть справа стоит обратная матрица.

7.3. **Системы линейных уравнений.** Любая система линейных уравнений имеет вид $Ax = b$, где $x \in \Bbbk^n, y \in \Bbbk^m, A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ – линейный оператор. При приведении матрицы A методом Гаусса $\mathrm{rk}\, A$ не меняется. При этом в строго верхнетреугольном виде $\mathrm{rk}\, A$ равен количеству ненулевых столбцов. Отсюда, из равенства $\dim \mathrm{Ker}\, A + \dim \mathrm{Im}\, A = n$ следует, что число свободных переменных определено однозначно и равно размерности ядра A.

Предложение 7.5. Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда когда $\mathrm{rk}\, A$ равен $\mathrm{rk}(A \,|\, b)$).

Доказательство. Если решение существует, то $b \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, где a_i – столбцы матрицы A. Остаётся заметить, что $\mathrm{rk}\, A = \dim \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. □

7.4. **Сумма и пересечение подпространств.** Определим

$$U \cap V = \{w \,|\, w \in U, w \in V\} \text{ и } U + V = \{u + v \,|\, u \in U, v \in V\}$$

Ясно, что $U + V$ и $U \cap V$ сами являются векторным пространствами.

Предложение 7.6. $dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$.

Доказательство. Выберем базис $U \cap V$: $w_1, \ldots, w_k$ затем дополним его до базиса U векторами $u_{k+1}, \ldots, u_l$ и до базиса V векторами $v_{l+1}, \ldots, v_s$. Ясно, что набор

$$w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_l, v_{l+1}, \ldots, v_s$$

порождает $U + V$ и в нем $\dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$ элементов. Докажем, что он является базисом. Пусть

$$\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_l u_l + \lambda_{l+1} u_{l+1} + \ldots + \lambda_s v_s = 0.$$

Тогда $\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \lambda_l u_l = \lambda_{l+1} v_{l+1} + \ldots + \lambda_s v_s$. При этом правая часть лежит в U, а левая в V, значит, в пересечении. Отсюда $\lambda_{l+1} = \ldots = \lambda_s = 0$. А отсюда и все остальные коэффициенты нулевые. □

Определение 7.7. Прямая сумма векторных пространств U и V это векторное пространство

$$U \oplus V = \{(u, v) \,|\, u \in U, v \in V\}$$

с покомпонентыми операциями сложения и умножения на скаляр.

Аналогично определяется прямая сумма $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Предложение 7.8. Пусть $V, W \subset U$ такие подпространства, что
1) $V \cap W = 0$;
2) $V + W = U$. Тогда $U \simeq V \oplus W$

Доказательство. Из свойств следует, что любой вектор из U единственным образом представляется в виде суммы $u = v + w$. Тогда отображение $V \oplus W \to U, (v, w) \mapsto v + w$ – изоморфизм. □

Предложение 7.9. Пусть $U_1, \ldots, U_n \subset U$ такие подпространства, что
1) $U_i \cap \sum_{i \neq j} U_j = 0$;
2) $\sum_i U_i = U$. Тогда $U \simeq \bigoplus_{i=1}^n U_i$.

Доказательство. Аналогично случаю двух подпространств. □

В случае бесконечного числа пространств существует два различных понятия: прямая сумма и прямое произведение. Прямая сумма состоит из наборов, в которых только конечное число векторов ненулевое, в то время как в прямом произведении набор векторов может быть произвольным. Например, прямая сумма счётного набора векторных пространств изоморфна $\Bbbk[x]$, а прямое произведение $\Bbbk[[x]]$.

7.5. **Алгоритм нахождения базиса суммы и пересечения подпространств.** Если заданы пространства $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ и $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ то легко найти базис их суммы: нужно выписать все эти вектора в матрицу и привести её методом Гаусса к верхнетреугольному виду. Тогда строки с единицами будут базисом суммы.

Чтобы найти базис пересечения запишем матрицу вида $2n \times n$ такого вида: $\begin{pmatrix} U & U \\ V & 0 \end{pmatrix}$ и приведем методом Гаусса к верхнетрегольному виду – получим матрицу вида $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где в A стоит базис $U + V$. Тогда в B получаем базис $U \cap V$. Почему?

Обозначим через $H = (U, U) + (V, 0)$ подпространство в $\Bbbk^n \oplus \Bbbk^n$ и рассмотрим проекцию $\pi_1 : H \to \Bbbk^n$ на первую координату. Тогда $\operatorname{Im} \pi_1 = U + V$, $\ker \pi_1 = (0, U \cap V)$. Значит, $\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim H$. В матрицах A, B стоит базис H, причём в A – базис $U + V$. При этом вектора из B лежат в ядре, ЛнеЗ и их количество равно размерности $U \cap V$. Значит в B стоит базис пересечения.

7.6. **Двойственное пространство.** Пусть V – векторное пространство над полем $\Bbbk$.

Определение 7.10. Пространство $Hom(V, \Bbbk)$ называется *двойственным пространством* и обозначается через V^*.

Элементы V^* – линейные функционалы. Если зафиксировать базис E пространства V, то получим биекцию

$$\{\text{функционалы}\} \longleftrightarrow \{\text{произвольные функции}\, E \to \Bbbk\}$$

Следствие 7.11. Если $\dim V = \infty$, то $\dim V^* > \dim V$.

В случае $\dim V = n$ и базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ определим функционалы e_i^*:

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

образуют базис V^*, в частности, $\dim V = \dim V^*$. Отметим при этом, что не существует никакого способа задать изомофризм V и V^*, не выбирая базис, то есть изоморфизм в этом случае *не является каноническим.*

Пример 7.12. $\Bbbk[x]^* \simeq \Bbbk[[x]]$ как векторное пространство: выберем базис $1, x, x^2, \ldots$ в $\Bbbk[x]$ и каждому $f \in \Bbbk[x]^*$ сопоставим ряд $\sum_{i=0}^{\infty} f(x^i) x^i$. При этом изоморфизме функционал $\mathrm{ev}_a : \Bbbk[x] \to \Bbbk, f \to f(a)$ переходит в геометрическую прогрессию $\dfrac{1}{1 - ax}$.

Предложение 7.13. Отображение $\pi : V \to V^{**}, v \to (F : f \to f(v))$ изоморфизм векторных пространств.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис V. Тогда

$$\pi(e_i)(e_j^*) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},$$

то есть $\pi(e_i) = e_i^{**}$, а значит π переводит базис в базис, то есть является изосорфизмом. $\square$

В частности, если $\dim V < \infty$, то $V \simeq V^{**}$ *канонически.*