

Тройное тождество Якоби и приложения

(версия от 16 октября)

0. Формулировка и комментарии.....	1
1. Элементарное доказательство	1
2. О комплексно-аналитическом доказательстве	3
3. О комбинаторном доказательстве	3
Литература.....	3

0. Формулировка и комментарии

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} Z^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) \prod_{m=1}^{\infty} \left((1 + q^{2m-1} Z) \left(1 + \frac{q^{2m-1}}{Z} \right) \right) \quad (\text{яс3})$$

Эта формула понимается либо аналитически при $q \in \mathbb{D}_1$, $Z \in \mathbb{C}$, либо как равенство в $\mathbb{Q}(Z)[[q]]$.

Ниже приводятся или намечаются три её доказательства

- Элементарное;
- Комплексно-аналитическое – краткий набросок ;
- Комбинаторное.

Элементарное доказательство воспроизводится по [ПолиаСеге1978]. Краткий набросок комплексно-аналитического доказательства (с существенно изменёнными доказательствами) следует [ГурвицКурант1968].

1. Элементарное доказательство

Оно представлено в [ПолиаСеге1978] двумя задачами на стр. 27 (мы заменяем оригинальное z на наше Z):

52. Определить коэффициенты $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ в тождестве

$$\begin{aligned} & (1 + qZ)(1 + qZ^{-1})(1 + q^3Z)(1 + q^3Z^{-1}) \dots \\ & \dots (1 + q^{2n-1}Z)(1 + q^{2n-1}Z^{-1}) = \\ & = C_0 + C_1(Z + Z^{-1}) + C_2(Z^2 + Z^{-2}) + \dots C_n(Z^n + Z^{-n}). \end{aligned}$$

53. Из тождества задачи 52 предельным переходом вывести формулу

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1}Z)(1 + q^{2n-1}Z^{-1})(1 - q^{2n}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} Z^n \quad (|q| < 1).$$

Решения приводятся со ссылкой на [Lacour1897], стр. 398, и на [Jacobi1881], Werke, т.1., стр. 234.

52. Обозначим рассматриваемое выражение через $\varphi_n(Z)$. Имеем:

$$\varphi_n(q^2 Z) = \varphi_n(Z) \frac{1 + q^{2n+1} Z}{qZ + q^{2n}}.$$

Отсюда

$$C_\nu q^{2\nu+1} (1 - q^{2n-2\nu}) = C_{\nu+1} (1 - q^{2n+2\nu+2}) \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$C_n = q^{n^2},$$

следовательно,

$$C_\nu = \frac{(1 - q^{2n+2\nu+2})(1 - q^{2n+2\nu+4}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-2\nu})} q^{\nu^2} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1).$$

53. Предельным переходом при $n \rightarrow \infty$ из задачи **52**.

Замечания

(а) Хотя приведённое доказательство кажется доступным школьнику, обе ссылки связывают его с монографиями по *теории эллиптических функций*. Таким образом, хоть и будучи полным и формально безупречным, доказательство оставляет скрытым некоторые важные структуры. См. далее.

(б) Краткое "решение" задачи предлагает перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве

$$\begin{aligned} (1+qZ)(1+qZ^{-1})(1+q^3Z)(1+q^3Z^{-1}) \dots (1+q^{2n-1}Z)(1+q^{2n-1}Z^{-1}) = \\ = \frac{(1 - q^{2n+2})(1 - q^{2n+4\nu+2}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-2})} + \\ + \frac{(1 - q^{2n+4})(1 - q^{2n+6}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-2})} q(Z + Z^{-1}) + \\ + \frac{(1 - q^{2n+6})(1 - q^{2n+8}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-4})} q^4(Z^2 + Z^{-2}) + \\ + \dots q^{n^2}(Z^n + Z^{-n}), \end{aligned}$$

то есть установить, что при $|q| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 - q^{2n+2})(1 - q^{2n+4}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-2})} = \frac{1}{\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})}.$$

Это не вполне тривиальное упражнение.

2. О комплексно-аналитическом доказательстве

Оно завершается в [ГурвицКурант1968] на стр. 208 и использует результаты примерно 20 предшествующих страниц.

Ключевым является равенство

$$\theta'_{00}(0|\tau) = \pi \theta_{01}(0|\tau) \theta_{10}(0|\tau) \theta_{11}(0|\tau),$$

в котором фигурируют функции θ_{ab} , родственные нашей $\theta = \theta_{11}$.

3. О комбинаторном доказательстве

Известно прозрачное доказательство формулы

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)} Z^n \stackrel{?}{=} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k}) \prod_{m=1}^{\infty} \left((1 + q^{2m} Z) \left(1 + \frac{q^{2m-2}}{Z} \right) \right),$$

в которой наша $\Theta - \Theta_{11}$ заменена на чуть видоизменённую Θ_{10} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Jacobi1881] Carl Gustav Jacobi, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*. Berlin, G. Reimer, 1881.
- [Lacour1897] E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*. Paris, Gauthier-Villars, 1897.
- [ГурвицКурант1968] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*. М., "Наука", 1968. (Перевод с немецкого М.А. Евграфова).
- [ПолиаСеге1978] Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и Теоремы из Анализа*. М., "Наука", 1978. (Перевод с немецкого Д.А. Райкова).