

Листок 3

ГЕОМЕТРИЯ

Калейдоскопы или геометрии Кокстера

Чтобы сдать этот листок необходимо решить хотя бы 4 задачи. Если в задаче есть несколько пунктов, то для того, чтобы её сдать нужно решить все пункты.

1. Три прямые L_1, L_2, L_3 на евклидовой плоскости образуют треугольник с (внутренними) углами α, β и γ .
 - (а) При каких условиях на α, β, γ отражения от трех данных прямых порождают дискретную группу?
 - (б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область такого действия?
2. Даны три плоскости P_1, P_2, P_3 , содержащие ось z евклидова пространства E^3 . Углы между P_1 и P_2 , а также между P_2 и P_3 равны, соответственно, α и β .
 - (а) При каких условиях на α и β отражения от данных трех плоскостей порождают конечную группу?
 - (б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область такого действия?
3. Нарисуйте схемы Кокстера
 - (а) для всех треугольников Кокстера;
 - (б) для всех трехмерных многогранников Кокстера.
4. Опишите какой-либо четырехмерный многогранник Кокстера, отличный от четырехмерного куба.
5.
 - (а) Определяет ли геометрию Кокстера группа преобразований, порожденная отражениями от граней правильного тетраэдра?
 - (б) Тот же вопрос для куба.
 - (с) Тот же вопрос для октаэдра.
 - (d) Тот же вопрос для додекаэдра.
6. Докажите, что если из вершины многогранника P в E^3 выходит q ребер, то сумма двугранных углов при этих ребрах больше, чем $\pi(q - 2)$. Выведите отсюда, что если двугранные углы многогранника P не превосходят $\pi/2$, то из каждой его вершины исходят только три ребра, причём сумма двугранных углов при них больше π .
7. (требуется знание линейной алгебры). Пусть P — тетраэдр (не обязательно правильный). Занумеруем как-нибудь его грани. Обозначим через $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ двугранный угол между i и j гранями. Докажите, что α_{ij} удовлетворяют следующему соотношению

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \alpha_{12} & -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{14} \\ -\cos \alpha_{12} & 1 & -\cos \alpha_{23} & -\cos \alpha_{24} \\ -\cos \alpha_{13} & -\cos \alpha_{23} & 1 & -\cos \alpha_{34} \\ -\cos \alpha_{14} & -\cos \alpha_{24} & -\cos \alpha_{34} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

8. Докажите, что есть только 3 тетраэдра Кокстера в E^3 . Докажите, что всего есть 7 многогранников Кокстера в E^3 .

Назва- ние	Схема Кокстера	Размер- ность	Количество граней	Реализация в $\mathbb{R}^n$, $n \leq 3$
$\tilde{A}_1$		1	2	
$\tilde{A}_n$		$n - 1$	n	
$\tilde{B}_n$		$n - 1$	n	
$\tilde{C}_n$		$n - 1$	n	
$\tilde{D}_n$		$n - 1$	$n \geq 5$	нет
$\tilde{D}_4$		4	5	нет
$\tilde{F}_4$		4	5	нет
$\tilde{G}_2$		2	3	
$\tilde{E}_6$				нет
$\tilde{E}_7$				нет
$\tilde{E}_8$				нет

Рис. 1. Схемы Кокстера для геометрий Кокстера.